第壹部分：選擇題(占 60 分)

一、單選題(占 30 分)

說明：第 1 題至第 6 題，每題 5 個選項，其中只有一個是最適當的答案，畫記在答案卡之「解答欄」。各題答對得 5 分；未作答、答錯或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

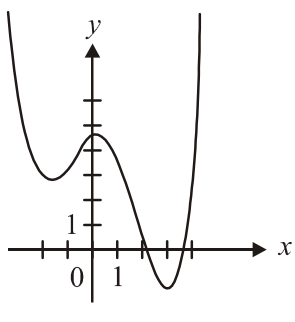
1. 在某個應用數學歸納法進行證明的習題解答中，Z_1、Z_2、…、Z_n、…等複數 $(n>1)$，恰能滿足 $Z_1=1$，且 $Z_{k+1}=i^k\cdot Z_k+1$（k 為任何一個正整數，$i=\sqrt{-1}$）等條件。請問：此時 Z_{20} 的值會是下列哪一個選項？

   (1) $-i$　　(2) $1+i$
   (3) 0　　(4) 1
   (5) 條件不足，無法判定

2. 設方程式 $\log_3 x+2\log_3(1-x)=\log_3 2$ 的實根個數為 k，則 k 之值為

   (1) 0　　(2) 1
   (3) 2　　(4) 3
   (5) 4

3. 右圖為某函數 $p(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ 的圖形，請問：下列五個選項中的數值，何者最小？



   (1) $p(-1)$
   (2) $p(x)$ 的係數總和
   (3) $p(x)=0$ 的實根總和
   (4) $p(x)=0$ 的所有根乘積
   (5) $p(x)=0$ 的虛根乘積

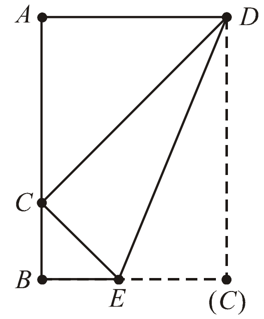
4. 已知無窮級數 $a+\frac{a}{1+2}+\frac{a}{1+2+3}+\cdots+\frac{a}{1+2+\cdots+n}+\cdots$ 的和為 10000，則可反推 a 之值為

(1) 625
(2) 1250
(3) 2500
(4) 5000
(5) 7500

5. 設複數平面上有兩個複數 A 與 B，其中 $A=3-4i$ ，$B=\cos\theta-i\sin\theta$ ，已知乘積 AB 落在複數平面上虛數軸(y 軸)右方的實數軸(x 軸)，則 B 的位置應該是落在複數平面的第幾象限內？

(1) 第一象限
(2) 第二象限
(3) 第三象限
(4) 第四象限
(5) 條件不足，無法判定

6. 有一張長方形色紙 $ABCD$，其中 $\overline{AD}$ 的長度為 4。這張紙被人將一角 $(\angle BCD)$ 折起，使得頂點 C 落在另一邊 $\overline{AB}$ 上，如右圖所示。設折痕為 $\overline{DE}$ (E 在原色紙一邊 $\overline{BC}$ 上)，且 $\angle CDE=\theta$ ，那麼下列各選項中，哪一個式子可以用來表示 $\overline{DE}$ 的長度？



(1) $4\sin\theta\sec\theta$
(2) $4\sin\theta\cos\theta$
(3) $2\sec\theta\csc\theta$
(4) $2\sec^2\theta\csc\theta$
(5) $2\sec\theta\csc^2\theta$

二、多選題(占 30 分)

說明：第 7 題至第 12 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，選出正確選項畫記在答案卡之「解答欄」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以零分計算。

7. 下列各項有關函數 $y = f(x) = 4\sin 2x - 3\cos 2x + 5$ 之圖形的敘述，哪些是正確的？

(1) 此函數圖形的週期為 2π

(2) $-5 \le f(x) \le 5$

(3) 此函數圖形與 y 軸交於點(0,2)

(4) 此函數圖形與 x 軸的交點有無限多個

(5) 此函數圖形對稱於 x 軸

8. 已知 2 和 $i+1$ 為三次方程式 $x^3 + ax^2 + bx - 4 = 0$ 的兩個根，其中 a、b 為實數。如果令 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 4$，試問下列各選項何者正確？

(1) $a < 0$

(2) $b < 0$

(3) $f(i-1) = 0$

(4) $f(a+b) = 0$

(5) $f(1)f(4) > 0$

9. 小丸子在她姊姊的數學課本中看到兩組等差數列，分別是由 1,4,7,10,⋯,1000 所構成的數列 $\langle a_n \rangle$，以及由 11,21,31,41,⋯,1001 所構成的數列 $\langle b_n \rangle$。小丸子在把玩一番後發現，竟然有一些數字可以同時出現在這兩組數列中！如果將上述兩組數列裡的共同項抽出來做爲一組新數列 $\langle c_n \rangle$，則下列關於 $\langle c_n \rangle$ 的各項敘述，哪些是正確的？

(1) $\langle c_n \rangle$ 中的首項爲 61

(2) $\langle c_n \rangle$ 中的末項爲 991

(3) $\langle c_n \rangle$ 中共有 32 項

(4) 數列 $\langle c_n \rangle$ 的總和爲 16863

(5) 數列 $\langle c_n \rangle$ 的總和爲 16833

10. 設三實數 a、b、c，已知二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形通過點 $(0,-2)$ 且與 x 軸不相交；又對任意實數 t 而言，$f(-t-1)=f(t+3)$ 恆成立，則下列選項何者正確？

(1) $a>0$

(2) $a+b<0$

(3) $b+c>0$

(4) $b^2+4ac<0$

(5) $f(-1)>f(4)$

11. 設非零整數 a、b，已知對任意非零整數 m 而言，a 除以 m 所得到的餘數與 b 除以 m 的餘數相等時，記爲「$a \infty b$」，此時 $m \mid (a-b)$，亦即 $a-b$ 必爲 m 的倍數；另一方面，形如 $a+bi$ 的複數又可用坐標平面上的一個點 (a,b) 表示。請問：下列關於整數 a、b 的各項敘述中，哪些是正確的？

(1) 若 $a \infty b$，則 a、m 的最大公因數等於 b、m 的最大公因數

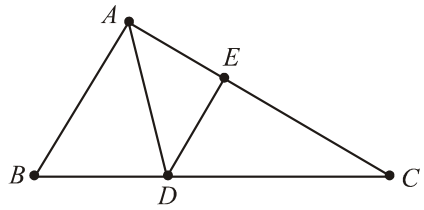
(2) 當 c 爲另一非零整數時，若 $ca \infty cb$，則 $a \infty b$

(3) 若已知某方程式 $ax+by+1=0$ 在坐標平面上的圖形不通過第三象限，則複數平面上的兩複數 $a+bi$ 與 $b+i$ 必不在同一象限中

(4) 如果在複數平面上將滿足 $|(a-1)+(b-1)i|=|a+bi|$ 的複數 $a+bi$ 全都標示出來，這樣所形成的圖形恰爲兩個點

(5) 若 $a \neq b$，則 $|a-b| \geq 1$

12. 設 ΔABC，其中 $\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=5$，$\overline{BC}=6$，而 $\angle BAC$ 的角平分線 $\overline{AD}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D 點。若 E 點為 $\overline{AC}$ 上之動點，則當 E 點移動到 $\overline{DE}$ 有最小長度之位置時，下列各相關數值何者正確？



(1) $\overline{BD}=\dfrac{15}{4}$

(2) ΔABC 的面積為 $2\sqrt{14}$

(3) ΔABC 的外接圓半徑為 $\dfrac{2\sqrt{14}}{7}$

(4) $\overline{DE}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

(5) $\overline{AD}=\dfrac{\sqrt{105}}{4}$

第貳部分：選填題(占 40 分)

說明：1. 第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「解答欄」所標示的列號(13~33)。
2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 設 $S=\dfrac{1}{n}+\dfrac{4}{n}+\dfrac{9}{n}+\cdots+\dfrac{256}{n}$，其中 n 為正整數，那麼使得 S 之值為整數的 n 共有 ⑬⑭ 個。

B. 有長度為 600 公分的繩子一條，切取 $\dfrac{3}{4}$ 圍成一個正三角形，令此三角形面積為 S_1，再從餘下的 $\dfrac{1}{4}$ 中切取 $\dfrac{3}{4}$ 圍成第二個正三角形，令此三角形面積為 S_2，如此持續做下去。如果前述程序永遠進行而不中斷，則 S_1、S_2、⋯、S_n、⋯等正三角形面積之總和為 ⑮⑯⑰⑱$\sqrt{⑲}$ 平方公分。

C. 已知複數 $\dfrac{z-1}{z+1}$ 的實部為 0，則 $|z|$ 為 ⑳ 。

D. 已知藥物 A 注入某種生物體 t 小時後，在該生物體內所量到之 A 殘餘量為 $f(t)$ 公克；又由實驗數據發現，若令 $x=t$， $y=\log f(t)$，則數對 (x,y) 在坐標平面上的圖形恰好是直線 $y=a-bx$ 的一部分。今將藥物 A 注入前述生物體中，於稍後第 1 小時及第 3 小時量得之殘餘量分別為 2 公克及 0.08 公克，那麼根據實驗與測量結果，可推論當初注入該生物體的藥物 A 應為 ㉑㉒ 公克。

E. 設一次多項式 $px+r$ 為多項式 $(x-1)^{10}$ 除以 x^2+1 的餘式，其中 p、r 都是實數，則 $p-r$ 之值為 ㉓㉔㉕ 。

F. 設 $0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$，若 $\left|1+\log_2\cos\theta\right|+\left|1+\log_2\sin\theta\right|=2$，則 $\tan\theta=$ ㉖.㉗㉘ 。

G. 設 A、B、O 為複數平面上三點，分別表示複數 α、β、0。若 α、β 同時滿足 $\left|\alpha-3\right|=1$ 和 $\beta=(-1+i)\alpha$，則 ΔABO 面積的最大值與最小值總和為 ㉙㉚ 。

H. 設 $k=2011090602$， $a=(1+\dfrac{1}{k})^k$ ， $b=(1+\dfrac{1}{k})^{k+1}$ ，則 $\dfrac{11^2\cdot a^b}{b^a}$ 之值為 ㉛㉜㉝ 。

可能用到的參考公式及數值

1. 一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的公式解：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

2. 平面上兩點 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 間距離爲 $\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

3. 通過 (x_1,y_1) 與 (x_2,y_2) 的直線斜率 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，$x_2\neq x_1$

4. 首項爲 a 且公比爲 r 的等比數列前 n 項之和 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$，$r\neq 1$

5. 三角函數的和角公式：
   $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A$
   $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

6. ΔABC 的正弦定理：$\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$
   ΔABC 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

7. 棣美弗定理：設 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，則 $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$