

第壹部分：選擇題(占 60 分)

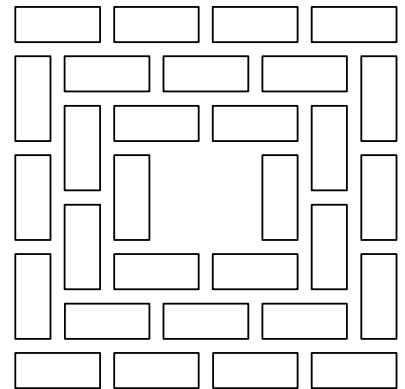
一、單選題(占 30 分)

說明：第 1 題至第 6 題，每題 5 個選項，其中只有一個是最適當的答案，畫記在答案卡之「解答欄」。各題答對得 5 分；未作答、答錯或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 一光線由點 $A(4,2)$ 發射，經原點後，遇直線 $x+2=0$ 反射，求反射後的路徑在哪一直線上？

- (1) $x+2y=0$
- (2) $x+2y+4=0$
- (3) $2x-y+3=0$
- (4) $2x-y=0$
- (5) $2x-y-6=0$

2. 一廣場的地磚圖案，是由大小相同的長方體磚塊所排列而成，如圖(1)所示為最內三層的俯視圖。已知此廣場的地磚案共有 12 層，問總共需要相同的長方體磚塊多少塊？



圖(1)

3. 設 x 為實數，多項函數 $f(x) = x^2 + kx + k + 8$ ， $y = f(x)$ 的圖形在坐標平面上恰通過兩象限，則下列何者數值可滿足上述條件的 k 值？

- (1) -12
- (2) -6
- (3) 6
- (4) 12
- (5) 18

4. 小志計算出一正五邊形外接圓與內切圓之間所夾區域的面積為 A ；小剛計算出另一正六邊形外接圓與內切圓之間所夾區域的面積為 B 。若這兩個正多邊形的邊長都是 2，則下列何者正確？
- (1) $A = \frac{25}{36}B$
 - (2) $A = \frac{36}{25}B$
 - (3) $A = \frac{5}{6}B$
 - (4) $A = \frac{6}{5}B$
 - (5) $A = B$
5. 四邊形 $ABCD$ 為等腰梯形，其中 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， $\angle A = \angle B = 60^\circ$ ， $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{CB} = 2$ ， M 、 N 各為 \overline{BC} 、 \overline{CD} 的中點，則下列哪一個選項是錯誤的？
- (1) $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}| = 2\sqrt{3}$
 - (2) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$
 - (3) $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AN}$
 - (4) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 8$
 - (5) 若 $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC}$ ，則 P 必為 \overline{AB} 的中點
6. 心理學家有時候用數學模式： $L(t) = A(1 - 10^{-kt})$ 來描述時間 t 分鐘時的學習量 $L(t)$ ，其中 A 與 k 都是常數。當一個學生需要背熟 100 (即 $A = 100$) 個英文單字時，心理學家發現這個學生花 10 分鐘只背熟其中 10 個單字 (即 $L(10) = 10$)。根據這些資料，這個學生要能背熟 70 個單字所需的學習時間最接近何者？
- (1) 85 分鐘
 - (2) 95 分鐘
 - (3) 105 分鐘
 - (4) 115 分鐘
 - (5) 125 分鐘

二、多選題(占30分)

說明：第7題至第12題，每題有5個選項，其中至少有一個是正確的選項，選出正確選項畫記在答案卡之「解答欄」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得5分；答錯1個選項者，得3分；答錯2個選項者，得1分；所有選項均未作答或答錯多於2個選項者，該題以零分計算。

7. 函數 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ ，則下列選項何者正確？
- (1) $y = f(x)$ 之圖形必通過 $(-2, -3)$
 - (2) 方程式 $f(x) = 0$ 在 0 與 1 之間必有實根
 - (3) 方程式 $f(x) = 0$ 在 1 與 2 之間必有實根
 - (4) 當 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 時，方程式 $f(x) = 2\sin^2 \theta$ 在 0 與 1 之間必有實根
 - (5) 當 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 時，方程式 $f(x) = 2\sin^2 \theta$ 在 1 與 2 之間必有實根
8. 已知 $p = 2^{20}$ ， $q = 5^{10}$ ，則下列何者正確？
- (1) q 的最高位數字為 9
 - (2) $p + q$ 的個位數字為 1
 - (3) $p + q$ 是 7 位數
 - (4) pq 是 14 位數
 - (5) $\frac{p}{q}$ 之值大於 1
9. 下列各數學式何者為真？
- (1) $\sin 40^\circ > \tan 40^\circ$
 - (2) $\sin(870^\circ) > \cos(-430^\circ)$
 - (3) $\sin 1 > \sin 3$
 - (4) $\frac{1}{2} \sin 5^\circ \cos 5^\circ = \frac{1}{\tan 5^\circ + \cot 5^\circ}$
 - (5) $\sqrt{3} \sin 10^\circ - \cos 10^\circ = -4 \sin 10^\circ \cos 10^\circ$

10. 在空間坐標系中，設 $A(1,0,3)$ 、 $B(3,6,9)$ ，下列那些點在 \overline{AB} 的垂直平分面上？

- (1) $(3,0,-1)$
- (2) $(2,3,6)$
- (3) $(5,1,-1)$
- (4) $(5,4,4)$
- (5) $(0,8,\frac{5}{3})$

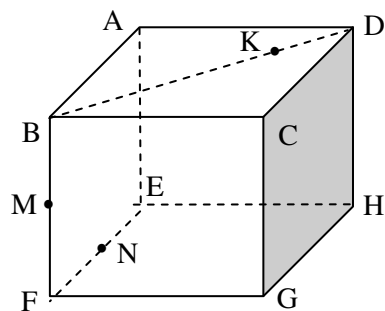
11. 設 a 、 m 、 n 為實數，且有一聯立方程組 $\begin{cases} ax+6y=m \\ 6x+ay=n \end{cases}$ 。試問下列敘述何者正確？

- (1) 若此聯立方程組恰有一組解，則 $m \neq 0$ 且 $n \neq 0$
- (2) 若此聯立方程組有無限多解，則 $m=0$ 且 $n=0$
- (3) 若 $m=n$ ，則此聯立方程組可能無解
- (4) 若此聯立方程組有無限多解，則 $am=6n$
- (5) 若 $a \neq 6$ ，則此聯立方程組有解

12. 如圖(2)所示，正立方體 $ABCD-EFGH$ 的稜長等於 4(即 $\overline{AB}=4$)， $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DB}$ ， M 、 N 分別為線段 \overline{BF} ，

\overline{EF} 的中點。試問下列敘述何者正確？

- (1) 內積 $\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{AB} = 12$
- (2) $\overline{KN} = 5$
- (3) $\cos \angle MKN = \frac{10}{\sqrt{143}}$
- (4) 四面體 $EFGK$ 之體積為 $\frac{32}{3}$
- (5) $\overrightarrow{KM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$



圖(2)

第貳部分：選填題(占 40 分)

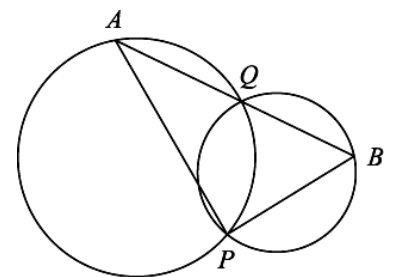
說明：1. 第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「解答欄」所標示的列號(13~32)。
2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 在小於 1000 的正整數中，若其本身恰等於其各位數字的總和的 7 倍，則滿足此條件的正整數有 ⑬ 個。

B. 求 $5^{(-\log_5 7)} + 5^{(-2\log_5 7)} + 5^{(-3\log_5 7)} + \dots + 5^{(-n\log_5 7)} + \dots$ 至無窮多項之和為 $\frac{\textcircled{14}}{\textcircled{15}}$ 。

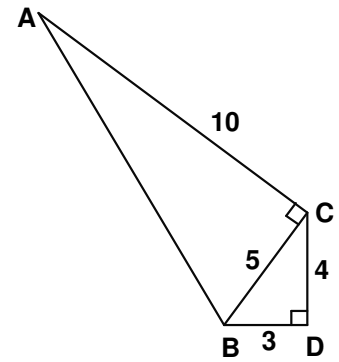
C. 設 $a、b$ 均為實數， $i = \sqrt{-1}$ ，且 $z = a + bi$ ，已知複數 z 滿足 $\text{Arg}(z + i) = 23^\circ$ ， $\text{Arg}(z - i) = 293^\circ$ ，則 $a^2 + b^2 = \underline{\textcircled{16}}$ 。

D. 如圖(3)，半徑分別為 5 和 4 的大小兩圓相交於 $P、Q$ 兩點， $A、B$ 兩點分別在兩個圓上且線段 \overline{AB} 通過 Q 點，若 $\overline{PA} = 7$ ，則 \overline{PB} 之值為 $\frac{\textcircled{17}\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ 。



圖(3)

- E. 將二股長為 5 公分、10 公分的直角 $\triangle ABC$ 及二股長為 3 公分、4 公分的直角 $\triangle BCD$ 擺放如圖(4)，試求 $\overline{AD} = \sqrt{\textcircled{20}\textcircled{21}\textcircled{22}}$ 。



圖(4)

- F. 飛機引擎故障，在空中 $P(5,15,20)$ 處，沿著直線 $\frac{x-5}{1} = \frac{y-15}{2} = \frac{z-20}{2}$ 的方向，以每秒 3 單位的速度衝向海平面(xy 平面)，試問 ②③②④ 秒後飛機會墜入海裡。

- G. 設有一圓 C 切直線 $L: \begin{cases} x=1+t \\ y=-1+2t \end{cases}, t \in R$ 於點 $A(1,-1)$ ，且此圓上有另一點 $B(-4,-6)$ ，則此圓 C 之方程式為 $(x+\textcircled{25})^2 + (y-\textcircled{26})^2 = \textcircled{27}\textcircled{28}\textcircled{29}$ 。

- H. 空間坐標中， $P(x,y,z)$ 為球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 5$ 上的動點，另有兩定點 $A(-1,2,4)$ 、 $B(2,6,4)$ ，則 $\triangle ABP$ 面積最小值為 $\frac{\textcircled{30}\sqrt{\textcircled{31}}}{\textcircled{32}}$ 。

可能用到的參考公式及數值

- 一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的公式解：
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
- 平面上兩點 $P_1(x_1, y_1)$ ， $P_2(x_2, y_2)$ 間的距離為 $\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- 通過 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 的直線斜率 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ， $x_2 \neq x_1$
- 等比數列 $\langle ar^{n-1} \rangle$ 的前 n 項之和 $S_n = \frac{a \cdot (1 - r^n)}{1 - r}$ ， $r \neq 1$
- 三角函數的和角公式： $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ ， $\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{1 - \tan \theta_1 \tan \theta_2}$
 $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$
- $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{1}{2R}$ ， R 是外接圓半徑
 $\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
- 棣美弗定理：設 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ，則 $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ ， n 為一正整數
- 參考數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$ ， $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ ， $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$