

## 第壹部分：選擇題(60%)

### 一、單選題(35%)

說明：第 1 至 7 題，每題選出最適當的一個選項，標示在答案卡之「解答欄」，每題答對得 5 分，答錯不倒扣。

1. 假設  $a, b, c$  是三個正整數。若 3 是  $a, b$  的最大公因數，且 2, 9, 14 都是  $b, c$  的公因數，則下列何者正確？
  - (1)  $c$  一定可以被 36 整除
  - (2)  $b \geq 252$
  - (3)  $9 \mid (a, c)$
  - (4)  $a, b, c$  三個數的最大公因數是 9 的因數
  - (5)  $a, b, c$  三個數的最小公倍數大於或等於  $9 \times 2 \times 14$
  
2. 試問方程式  $x^2 = \sin |x|$  有多少個實數解？
  - (1) 0
  - (2) 1
  - (3) 2
  - (4) 3
  - (5) 4
  
3. 某人在  $O$  點測量到遠處有一物體正在作等速直線運動，開始時該物體在位置  $P$  點，一分鐘後，其位置在  $Q$  點且  $\angle POQ = 90^\circ$ ，再過一分鐘後，則該物體位置會在  $R$  點，且  $\tan(\angle QOR) = 2$ ，試求  $\tan(\angle OPQ)$  的值為何？
  - (1) 1
  - (2)  $\frac{1}{2}$
  - (3)  $\frac{1}{3}$
  - (4)  $\frac{1}{4}$
  - (5)  $\frac{1}{5}$

4. 下列數列何者為收斂數列？

(1)  $\{(-2)^n \left(\frac{3}{4}\right)^{n+3}\}$

(2)  $\left\{\frac{0.001n^3}{2300n^2 - 5n + 100}\right\}$

(3)  $\{(-1.1)^n\}$

(4)  $\left\{\frac{0.000001(n-1)^{-3}}{100000000(n+1)^{-2}}\right\}$

(5)  $\left\{\frac{\pi^n}{3.14^{n-9}}\right\}$

5. 設相異三個質數  $p$ 、 $q$ 、 $r$ ，此三質數之乘積為其和的 11 倍，試問  $p+q+r$  之最大值為何？

(1) 19

(2) 21

(3) 23

(4) 25

(5) 26

6. 數列  $\langle a_n \rangle$  滿足  $a_n = (n+1)(n-3)$ ，且  $0 < a_n < 100$ ，則此數列各項之總和為何？

(1) 343

(2) 345

(3) 348

(4) 350

(5) 352

7. 設有四個正整數的數列，前三數成等比數列，後三數成等差數列，又首末兩項之和為 16，中間兩項之和為 12，則此四數之最大值為何？

(1) 15

(2) 16

(3) 17

(4) 18

(5) 19

## 二、多選題(25%)

說明：第8至12題為多選題，每題各有5個選項，其中至少有一個是正確的答案。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，該題得5分。若答錯 $k$ 個選項，可得 $\frac{5-2k}{5}$ 題分。例如答錯一個選項者，得該題 $\frac{3}{5}$ 題分；答錯兩個選項者，得該題 $\frac{1}{5}$ 題分，以此類推；所有選項均未作答或答錯多於2個選項者，該題以零分計算。

8. 設 $i = \sqrt{-1}$ ，則下列無窮級數中何者為收斂級數？

(1)  $1-1+1-1+1-1+\dots+(-1)^{n-1}+\dots$

(2)  $\frac{10}{11} + \frac{10^2}{11^2} + \dots + \frac{10^n}{11^n} + \dots$

(3)  $\sum_{n=1}^{\infty} |2+i|^n$

(4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n$

(5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{5^n}$

9. 設 $f(x)$ 為實係數三次多項式且 $f(x)=0$ 有兩個複數根 $a-i, -1+bi$  ( $a, b$ 均為不為零的實數)，則

(1)  $a+b=0$

(2)  $f(a+bi)=0$

(3)  $y=x$ 與 $y=f(x)$ 兩圖形可能沒有交點

(4)  $f(f(x))=0$ 沒有實數根

(5) 若 $f(0)>0$ 且 $f(1)<0$ ，則 $f(2)>0$

10. 設 $f(x) = x^2 - x + \frac{4}{x^2 - x + 3}$  ( $x \in \mathbb{R}$ )，則

(1)  $x^2 - x + 3$ 恆大於0

(2)  $f(x)$ 之最小值4

(3)  $f(x)$ 之最大值1

(4) 當 $x^2 - x + 3 = 2$ 時， $f(x)$ 有最小值

(5)  $f(x)$ 沒有最大值

11. 設  $\sin \theta + \cos \theta = k$  且  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ，則下列何者正確？

- (1) 若  $k = \sqrt{3}$ ，則  $\theta$  有實數解
- (2) 若  $k = \sqrt{2}$ ，則  $\theta$  有實數解
- (3) 若  $k = 1$ ，則  $\theta$  有實數解
- (4) 若  $k = \log 20$ ，則  $\theta$  有實數解
- (5) 若  $k = \sqrt[3]{3}$ ，則  $\theta$  有實數解

12. 設二次方程式  $2x^2 - 3x - 5 = 0$  的兩根是  $\tan A$  與  $\tan B$ ，且  $\tan A > \tan B$ ，則下列何者正確？

- (1)  $\tan(A+B) = \frac{3}{7}$
- (2)  $\angle A$  與  $\angle B$  為同一個象限角
- (3)  $\tan A > 2$
- (4)  $\tan B < -1$
- (5)  $\tan(A-B) > -2$

## 第貳部分：選填題(40%)

說明：1. 第 A 至 H 題，將答案劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號(13~32)。

2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 設  $i = \sqrt{-1}$ ，已知方程式  $z^2 - 3z + 3 + i = 0$  有一根  $\alpha$  的實部是 1，另一根是  $\beta$ ，試求  $2\alpha + \beta$  為

⑬ + ⑭i。

B. 設  $x > 0$ ，解方程式  $\left(\frac{x}{2}\right)^{\log_3 2} = \left(\frac{x}{7}\right)^{\log_3 7}$ ，則  $x =$  ⑮⑯。

- C. 設多項式  $f(x) = (x+1)^8$ ，則  $f(x)$  除以多項式  $x^2 - 1$  的餘式為何？ ⑰⑱⑲  $x + ⑳㉑㉒$
- D. 若  $4 < x < 100$  且  $\log 3x$  的尾數是  $\log x$  尾數的 2 倍，求  $x =$  ㉓㉔。
- E.  $\triangle ABC$  中  $\angle A = 105^\circ$ ， $\overline{AB} = 2$ ， $\overline{AC} = 2\sqrt{2}$ ，求  $\triangle ABC$  的外接圓半徑為何？ ㉕。
- F. 設一測量人員在台北 101 大樓正南方的地面上一點 A 處測出台北 101 大樓之樓頂的仰角是  $45^\circ$ ，這測量人員向東方移動  $508\sqrt{2}$  公尺到達另一點 B，測得樓頂的仰角是  $30^\circ$ ，求台北 101 大樓的高度為何？ ㉖㉗㉘ 公尺。
- G. 設函數  $f(x) = 1 + \cos x + \sin x - 2 \cos x \cdot \sin x$ ，求  $f(x)$  的最小值為何？ ㉙  $\sqrt{㉚}$ 。
- H. 設  $i = \sqrt{-1}$ ，且複數  $z = \cos \theta + i \sin \theta$ ，其中  $0 \leq \theta < 2\pi$ ，則共有多少個  $z$  滿足  $z^{20} + \frac{1}{z^{20}} = -2$  呢？  
㉛㉜ 個。

## 可能用到的參考公式及數值

1. 首項為  $a$  且公差為  $d$  的等差數列前  $n$  項之和  $S_n = \frac{n[2a + (n-1)d]}{2}$

首項為  $a$  且公比為  $r$  的等比數列前  $n$  項之和  $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ ,  $r \neq 1$

2.  $\triangle ABC$  的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ,  $R$  為三角形之外接圓半徑

$\triangle ABC$  的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

3. 和角公式： $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B}$ ,  $\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \cdot \tan B}$

4. 棣美弗定理：設  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ , 則  $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ ,  $n$  為一正整數

5. 參考數值： $\log 2 \approx 0.3010$ ;  $\log 3 \approx 0.4771$ ;  $\sqrt{2} \approx 1.414$ ;  $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ ;  $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$