

## 第壹部分：選擇題(60%)

### 一、單選題(35%)

說明：第 1 至 7 題，每題選出最適當的一個選項，標示在答案卡之「解答欄」，每題答對得 5 分，答錯不倒扣。

1. 設  $\theta$  為銳角，且  $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\sec \theta$  成等差數列，則  $\tan \theta =$

- (1)  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$                       (2)  $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$                       (3)  $-1+\sqrt{5}$   
(4)  $1+\sqrt{5}$                       (5)  $\sqrt{5}$

2. 若  $0 \leq \theta \leq 4\pi$  且滿足  $\log_{10} |\sin \theta| = 0$ ，則有幾組解？

- (1) 0                                  (2) 2                                  (3) 4  
(4) 6                                  (5) 8

3. 若  $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r = 0$  方程式之三根為  $-101$ ， $201$ ， $301 - 401i$ ，其中  $p$ 、 $q$ 、 $r$  為複數，試問方程式  $g(x) = x^6 + px^4 + qx^2 + r = 0$  有幾個實根？

- (1) 0                                  (2) 2                                  (3) 3  
(4) 4                                  (5) 6

4. 若  $P$  是  $\triangle ABC$  所在平面內一點，且滿足  $|\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC}| = |\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} - 2\overrightarrow{PA}|$ ，則  $\triangle ABC$  為何種三角形？

- (1) 直角三角形 (2) 正三角形  
(3) 等腰三角形 (4) 銳角三角形  
(5) 鈍角三角形

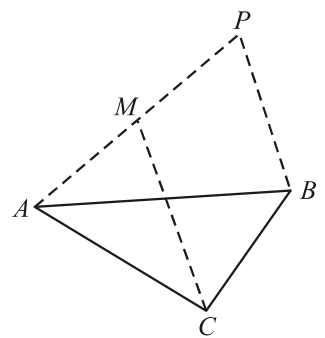
5. 已知  $\log 2 = 0.3010$ 、 $\log 3 = 0.4771$ ，且  $\log 25! = 25.1906$ ，求  $23!$  是幾位數字？

(註： $23! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 23$ )

- (1) 26 (2) 25 (3) 24  
(4) 23 (5) 22

6. 如圖，在空間中  $\triangle ABC$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\overline{AC} = b$ 、 $\overline{BC} = a$ ， $P$  是  $\triangle ABC$  所在平面外一點， $\overline{PB} \perp \overline{AB}$ ， $M$  是  $\overline{PA}$  的中點， $\overline{AB} \perp \overline{MC}$ ，則歪斜線  $MC$  與  $PB$  間的距離為？

- (1)  $\frac{1}{2}a$  (2)  $\frac{1}{2}b$   
(3)  $\sqrt{a^2 + b^2}$  (4)  $\frac{1}{4}\sqrt{a^2 + b^2}$   
(5)  $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$



7. 坐標平面上，設  $y = k (k > 0)$  圖形與函數圖形  $f_1(x) = \log_a x$ ， $f_2(x) = \log_b x$ ， $f_3(x) = \log_c x$ ， $f_4(x) = \log_d x$ ， $f_5(x) = \log_e x$ ，分別交於  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$  五點，且  $a > b > c > 1 > d > e > 0$ 。若  $Q$  為  $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ 、 $f_3(x)$ 、 $f_4(x)$ 、 $f_5(x)$  圖形共同之交點，則下列連線何者斜率最小？

- (1)  $\overrightarrow{QA}$
- (2)  $\overrightarrow{QB}$
- (3)  $\overrightarrow{QC}$
- (4)  $\overrightarrow{QD}$
- (5)  $\overrightarrow{QE}$

二、多選題(25%)

說明：第 8 至 12 題為多選題，每題各有 5 個選項，其中至少有一個是正確的答案。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，該題得 5 分。若答錯  $k$  個選項，可得  $\frac{5-2k}{5}$  題分。例如答錯一個選項者，得該題  $\frac{3}{5}$  題分；答錯兩個選項者，得該題  $\frac{1}{5}$  題分，以此類推；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以零分計算。

8. 設  $O$  為任意點，下列選項哪些可決定  $A$ 、 $B$ 、 $P$  三點共線？
- (1)  $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AP}$
  - (2)  $4\overrightarrow{OP} - 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \vec{0}$
  - (3)  $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$
  - (4)  $\overrightarrow{OP} = \frac{3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{4}$
  - (5)  $\overrightarrow{OP} = \frac{5\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}}{2}$

9. 下列選項哪些是正確？

- (1) 空間中過平面外一點恰可作一平面與此平面平行
- (2) 空間中過平面上一點恰可作一條直線與此平面垂直
- (3) 平面上過直線上一點恰可作無限多條直線與此直線垂直
- (4) 空間中兩直線不相交必平行
- (5) 空間中兩歪斜線，若同時投影至某一平面，必有交點

10. 下列敘述何者正確？

- (1)  $3 > 10^{0.3}$
- (2)  $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} - \log_3 1 > 0$
- (3) 若  $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ ，則  $-2 \leq \cos x + \sqrt{3} \sin x \leq -1$
- (4) 當  $0 \leq x \leq 2\pi$  時， $|\sin x| = |\log_2 x|$  有兩個實根
- (5)  $y = f(x) = |3 \sin 2x + 1|$  週期為  $\frac{\pi}{2}$

11. 下列各數中哪些數除以 13 化成循環小數後，小數點後循環節相同？

(例如： $0.03575757\cdots = 0.03\overline{57}$ ，循環節為 57)

- (1) 1313131
- (2) 2626262
- (3) 3939393
- (4)  $40^{13}$
- (5)  $13^5 - 2 \times 13^4 + 3 \times 13^3 - 4 \times 13^2 + 5 \times 13 - 12$

12. 設整係數多項式  $f(x) = x^3 + (k-1)x^2 + (4-k)x - 4$ ，若  $f(x)$  圖形與  $x$  軸恰交於一點  $(a, 0)$  且  $a$  為有理數。則下列哪些是  $k$  之可能值？
- (1)  $-5$                       (2)  $-3$                       (3)  $2$   
(4)  $4$                          (5)  $6$

**第貳部分：選填題(40%)**

說明：1. 第 A 至 H 題，將答案劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號(13~38)。  
2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

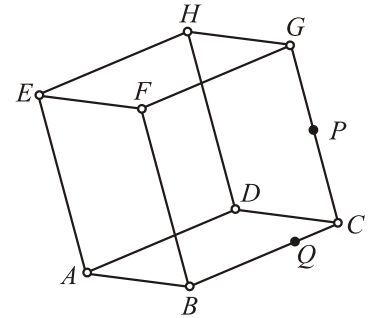
A. 化簡  $\sqrt{23 - 6\sqrt{6 - \sqrt{32}}}$  = ⑬ +  $\sqrt{⑭}$ 。

B. 一等比數列的首項為  $a_1$ ，公比為 3，第  $n$  項  $a_n = 972$ ，前  $n$  項之總和為  $S_n = 1456$ ，則數對  $(a_1, n) =$  ⑮,⑯。

C. 複數平面上兩集合  $A = \{z \mid |z - (1 - i)| \leq 5\}$  及  $B = \{z \mid |z - (7 + 7i)| \leq 5\sqrt{3}\}$  的交集部分面積為  $\frac{\textcircled{17}\textcircled{18}\textcircled{19}\pi}{\textcircled{20}} - \textcircled{21}\textcircled{22}\sqrt{\textcircled{23}}$ 。

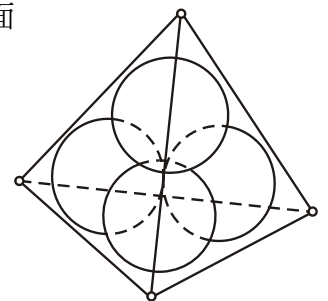
- D. 若  $z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ ，求  $1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \cdots + 30z^{29}$  之值化成極式為  $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ，其中  $r > 0$ ， $0 \leq \theta < 2\pi$ ，則  $r = \underline{\textcircled{24}\textcircled{25}}$ ， $\theta = \underline{\frac{\textcircled{26}}{\textcircled{27}}\pi}$ 。

- E. 已知正立方體  $ABCD-EFGH$  中， $P$  為稜  $\overline{GC}$  之中點， $Q$  落在  $\overline{BC}$  上，且  $\overline{FP} \perp \overline{PQ}$ ，試求  $\angle EPQ$  之度數為      $\textcircled{28}\textcircled{29}$      度。



- F. 設  $A(1,3,-1)$ 、 $B(3,-15,5)$ ， $P$  為球  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 8z + 8 = 0$  上任一點，則  $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$  之最小值為      $\textcircled{30}\textcircled{31}\textcircled{32}$     。

- G. 如圖，將大小相同且半徑為 1 的 4 顆球置入正四面體的容器裡，這個正四面體的高的最小值為  $\underline{\textcircled{33} + \frac{\textcircled{34}\sqrt{\textcircled{35}}}{\textcircled{36}}}$ 。



- H. 北區高中數學研習營共有 50 位同學編號 1 到 50 號，玩一個遊戲在有編號 1 到 50 號的箱子中，由同學分別依自己編號的倍數的每個箱子各投入一球，即編號 1 號在每個箱子各投入一球，編號 2 號在 2,4,6,⋯,50 號箱子各投入一球，編號 3 號在 3,6,9,⋯,48 號箱子各投入一球，在全部同學投完後，恰有 2 個球的箱子有  $a$  個，恰有 3 個球的箱子有  $b$  個，則  $a-b = \underline{\quad 37 \text{ } 38 \quad}$ 。

### 可能用到的參考公式及數值

1. 首項為  $a$  且公差為  $d$  的等差數列前  $n$  項之和  $S_n = \frac{n[2a + (n-1)d]}{2}$

首項為  $a$  且公比為  $r$  的等比數列前  $n$  項之和  $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ ， $r \neq 1$

2.  $\triangle ABC$  的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ， $R$  為三角形之外接圓半徑

$\triangle ABC$  的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

3. 和角公式： $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B}$ ， $\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \cdot \tan B}$

4. 棣美弗定理：設  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ，則  $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ ， $n$  為一正整數

5. 參考數值： $\log 2 \approx 0.3010$ ； $\log 3 \approx 0.4771$ ； $\sqrt{2} \approx 1.414$