

第壹部分：選擇題(55%)

一、單選題(25%)

說明：第 1 至 5 題，每題選出最適當的一個選項，標示在答案卡之「解答欄」，每題答對得 5 分，答錯不倒扣。

1. t 為實數，拋物線 $y = 2x^2 + tx + 3$ 的圖形頂點為 P_t ，所有 P_t 點所成圖形的方程式為何？
 - (1) $y = -2x^2 - 3$
 - (2) $y = -2x^2 + 3$
 - (3) $y = -2x + 3$
 - (4) $y = -2x - 3$
 - (5) $y = 2x + 3$

2. 坐標平面上二點 $P(\cos 1, \sin 1)$ ， $Q(2 \cos 3, 2 \sin 3)$ ，則對 \overline{PQ} 的長度，下列敘述哪一個正確？
 - (1) 介於 0 到 1 之間
 - (2) 介於 1 到 2 之間
 - (3) 介於 2 到 3 之間
 - (4) 介於 3 到 4 之間
 - (5) 介於 4 到 5 之間

3. 如圖 1， G 為 $\triangle ABC$ 之重心， I 、 J 、 K 分別為 $\triangle GBC$ 、 $\triangle GCA$ 、 $\triangle GAB$

之重心，則下列敘述何者**不正確**？

- (1) 向量 $\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} = \vec{0}$
- (2) 線段 $\overline{KJ} \parallel \overline{BC}$
- (3) 線段 $\overline{KJ} = \frac{1}{3} \overline{BC}$
- (4) 向量 $\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{GK} = \vec{0}$
- (5) 向量 $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AK} + \frac{3}{4} \overrightarrow{AJ}$

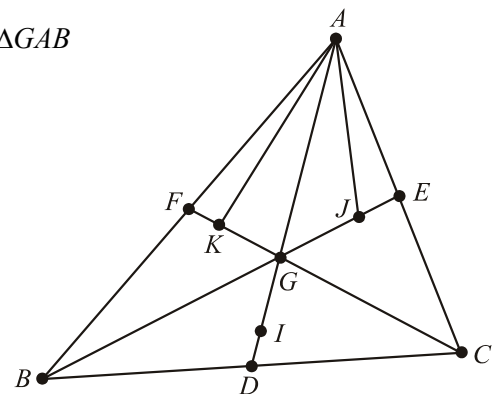


圖 1

4. 一圓位於 x 軸上方，且與雙曲線 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 相切，又圓心與雙曲線兩焦點恰好成爲一個正三角形，求此圓之半徑爲多少？

- (1) 5 (2) 6
(3) 7 (4) 8
(5) 9

5. 園遊會場有一賓果遊戲攤位，遊戲規則如下：

- I. 遊戲者依序寫下三個數字(由 0~9 中的數字可重複使用)
- II. 攤位的電腦將會隨機顯示三個數字
- III. 若所寫的三個數字與電腦的三個數字完全相同，可得 300 元獎金
- IV. 若所寫的三個數字與電腦的三個數字有兩個相同，可得 200 元獎金
- V. 若所寫的三個數字與電腦的三個數字只有一個相同，可得 100 元獎金

例如：電腦顯示的三個數字是 0 6 1

遊戲者寫的三個數字也是 0 6 1，可得 300 元獎金；

遊戲者寫的三個數字是 0 7 1、1 6 1 或 0 6 5，可得 200 元獎金；

遊戲者寫的三個數字是 0 5 2、1 6 0 或 7 8 1，可得 100 元獎金。

試問：在此攤位玩賓果遊戲一次，可得獎金的期望值爲多少元？

- (1) $\frac{6}{5}$ (2) $\frac{42}{5}$
(3) $\frac{69}{5}$ (4) 30
(5) $\frac{2800}{243}$

二、多選題(30%)

說明：第 6 至 11 題爲多選題，每題各有 5 個選項，其中至少有一個是正確的答案。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，該題得 5 分。若答錯 k 個選項，可得 $\frac{5-2k}{5}$ 題分。例如答錯一個選項者，得該題 $\frac{3}{5}$ 題分；答錯兩個選項者，得該題 $\frac{1}{5}$ 題分，以此類推；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以零分計算。

6. 一等差數列共有 6 項且各項皆為相異正整數，又其第 1、3、6 三項成等比，則關於此數列下列敘述何者正確？
- (1) 第 1 項為偶數
 - (2) 第 5 項是第 1 項的 2 倍
 - (3) 第 2 項為奇數
 - (4) 第 6 項是第 4 項的 2 倍
 - (5) 此數列總和之最小值為 39
7. 二次函數 $f(x) = ax^2 - 3ax + b$ ，已知 $f(1) > f(3) > 0$ ，則下列敘述正確的有哪些？
- (1) $a > 0$
 - (2) $b > 0$
 - (3) $f(1) > f(2)$
 - (4) $f(4) < 0$
 - (5) $f(x) = 0$ 恰有一正根一負根
8. 空間中有 $A(2,2,3)$ 、 $B(2,2,-1)$ ， P 是 xy 平面上的點；若 $\overline{PA} \perp \overline{PB}$ ， Γ 為所有 P 點所形成的圖形。下列哪些選項正確？
- (1) Γ 為一個球
 - (2) Γ 的半徑是 $\sqrt{3}$
 - (3) $(2,2,\sqrt{3})$ 位在 Γ 上
 - (4) $\triangle ABP$ 的面積是 $2\sqrt{3}$
 - (5) $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 12$ 與 $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4$ 之相交圖形落於 Γ 上

9. 已知正四面體的四個頂點分別位於兩條歪斜線 L_1 與 L_2 上；其中 $L_1 : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -3 - t, t \text{ 為實數,} \\ z = 0 \end{cases}$

$L_2 : \begin{cases} x = 2 + s \\ y = 2 + s, s \text{ 為實數.} \\ z = 1 \end{cases}$ 則下列敘述何者正確？

- (1) L_1 與 L_2 的距離為 1
- (2) $(0,1,0)$ 與 $(1,0,1)$ 為此正四面體的兩個頂點
- (3) 此正四面體的邊長為 $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (4) 此正四面體的體積為 $\frac{1}{3}$
- (5) 此正四面體的內切球半徑為 $\frac{1}{2\sqrt{3}}$

10. 如圖 2，有 $n(n \geq 5)$ 個大小不同的空心圓盤，依大小由下而上排列在三根短木棒中的一根 A ，假如每次只能移動一個圓盤，而且大圓盤不能疊放在小圓盤上面。若要將這 n 個圓盤全部移到另外的一根短木棒 B 上，且希望移動圓盤之最少次數為 a_n 次。則以下敘述哪些是正確的？

- (1) 最大的圓盤在整個過程中共移動 1 次
- (2) 第二大的圓盤在整個過程中共移動 2 次
- (3) 第三大的圓盤在整個過程中共移動 3 次
- (4) $a_7 = 127$
- (5) $a_{10} = 2 \times a_9 + 1$

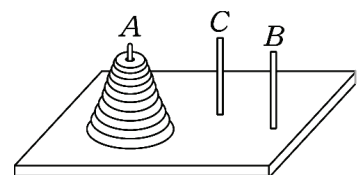


圖 2

11. 教育部希望了解目前台灣高中生近視的情形，近日對全台分區做抽樣調查，依城鄉區分，所得結果如下表：(四捨五入計算到小數第二位)

	都會地區高中生	鄉村地區高中生
在95%信心水準所得的信賴區間	[0.70,0.74]	[0.62,0.66]
抽樣學生人數	n_1	n_2

請問從此次抽樣調查結果可以得到下列哪些推論？

- (1) 此次抽樣的都會地區高中生近視比例高於鄉村地區高中生近視比例
- (2) 在城鄉兩地所得 95%信心水準的信賴區間有相同的抽樣誤差，表示在城鄉兩地抽樣的學生人數 $n_1 = n_2$
- (3) 若重新抽樣調查，將抽樣人數均增加為原來的兩倍，在城鄉兩地所得 95%信心水準的信賴區間仍有相同的抽樣誤差
- (4) 在台灣，都會地區高中生近視比例高於鄉村地區高中生近視比例
- (5) 若不分城鄉兩地，此次抽樣調查在 95%信心水準所得的信賴區間包含於[0.66,0.70]

第貳部分：選填題(45%)

說明：1. 第 A 至 I 題，將答案劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號(12~34)。
2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 有一長方形彈珠台 $ABCD$ ，長 $\overline{AB} = 6$ ，寬 $\overline{AD} = 3$ ，點 P 、 Q 在邊 \overline{CD} 上，且 $\overline{DP} = \overline{QC} = 2$ 。今有一彈珠一開始在點 P ，經三次反彈後最後停在點 Q (如圖 3，假設球皆直線前進，且反彈符合入射角等於反射角，圖僅供參考)，求整個過程彈珠的運動路徑總長為 ⑫ $\sqrt{13}$ ⑭。

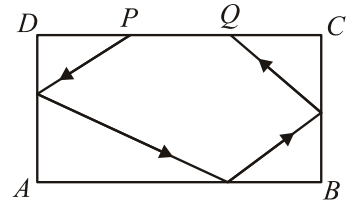


圖 3

- B. 設 $\Gamma_1 : y = \log_2 x$ ， $\Gamma_2 : y = \log_4 x$ ，直線 $L : y = k$ 與 Γ_1 、 Γ_2 依序交於 P 、 Q 兩點且 $\overline{PQ} = 20$ ，則 Q 點的 x 坐標為 ⑮ ⑯。

- C. 如圖 4， $\triangle ABC$ 中， D 為 \overline{BC} 上一點，若 $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{BD} = 3$ ， $\overline{AC} = 7$ ， $\angle ADC = 2\angle ABC$ ，則 $\overline{CD} =$ ⑰。

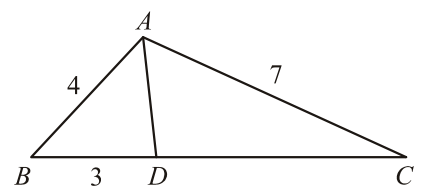


圖 4

- D. 坐標平面上兩點 $A(2,0)$ 、 $B(0,3)$ ， P 點在第一象限中且滿足 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} \leq 0$ ，則 P 點所形成區域的面積為 $\frac{18 + \frac{19}{21}\pi}{21}$ 。

- E. 如圖 5，四面體 $ABCD$ 的各稜 $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{CD} = \overline{BD} = 5$ ， $\overline{AD} = \overline{BC} = 6$ ，則四面體 $ABCD$ 的體積為 $\frac{22\sqrt{23}}{3}$ 。

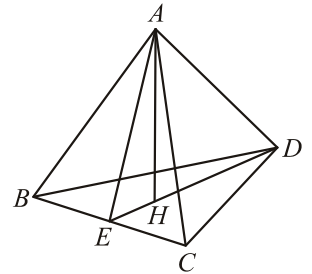


圖 5

- F. 在坐標空間中， $O(0,0,0)$ ， $A(12,5,0)$ ， $B(2,8,0)$ ， C 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 上，則四面體 $OABC$ 體積的最大值為 $\frac{24\sqrt{25}}{5}$ 。

- G. 小美手中有一條長 40 公分的緞帶(沒有彈性)，要用來裝飾一長 24 公分，寬 12 公分的長方形卡片 $ABCD$ ，其中緞帶的兩端點黏在點 A 和點 B (如圖 6 所示)。小美想在 \overline{CD} 邊上找一點 P ，使得緞帶剛好可以黏上去(其中 \overline{CP} 邊的長度小於 \overline{DP} 邊的長度)。求 \overline{CP} 邊的長為 $\frac{26\sqrt{27} - 28\sqrt{29}}{2}$ 公分。

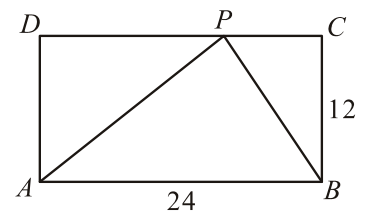


圖 6

- H. 有五道試題，若每題得分只有可能為 3 分、4 分或 5 分三種(得部分分數或全得，每題都不難，且有容易得分的部分，沒有 0 分)，則五道試題總得分為 20 分的得分分配情形有 $\frac{30\sqrt{31}}{3}$ 種。

- I. 某一停車場內，有 12 個停車格連成一排，今有 8 部車在此停車場隨機停車(一車一停車格)，請問剩下 4 個空的停車格恰好連在一起的機率為 $\frac{32}{33\sqrt{34}}$ 。

可能用到的參考公式及數值

- 一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的公式解：
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
- 平面上兩點 $P_1(x_1, y_1)$ ， $P_2(x_2, y_2)$ 間的距離為 $\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- 通過 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 的直線斜率 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ， $x_2 \neq x_1$
- 首項為 a_1 ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$
- 三角函數的和角公式：
$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$$
$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$
- $\triangle ABC$ 的正弦定理：
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$
$$\triangle ABC$$
 的餘弦定理：
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$
- 95%信心水準下之信賴區間：
$$\left[\hat{p} - 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$
- 1 徑度 ≈ 57.3 度
- 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$
- 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$