# 全國公私立高級中學

## 100 學年度學科能力測驗第三次聯合模擬考試

考試日期：100 年 11 月 3~4 日

# 數學考科

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 7 題，多選題 5 題，選填題第 A 至 H 題共 8 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上畫記，修正時應以橡皮擦拭，切勿使用修正液(帶)。

作答說明：在答案卡適當位置選出數值或符號。請仔細閱讀下面的例子。

(一)選擇題填答時，只用 1，2，3，4，5 等五個格子，而不需要用到 −，± 以及 6，7，8，9，0 等格子。

例：若單選題第 1 題的選項爲(1)3(2)5(3)7(4)9(5)11，而正確的答案爲 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第 1 列的 3 畫記（注意不是 7），如：

| 解答欄 | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | − | ± |
| 1 | □ | □ | ■ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |

例：若多選題第 10 題的正確選項爲(1)與(3)時，考生要在答案卡的第 10 列的 1 與 3 畫記，如：

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | − | ± |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | ■ | □ | ■ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |

(二)選填題的題號是 A，B，C……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 18 列的 3 與第 19 列的 8 畫記，如：

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | − | ± |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 18 | □ | □ | ■ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 19 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | ■ | □ | □ | □ | □ |

例：若第 C 題的答案格式，$\dfrac{⑳㉑}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 − 與第 21 列的 7 畫記，如：

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | − | ± |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | ■ | □ |
| 21 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | ■ | □ | □ | □ | □ | □ |

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

祝考試順利

## 第壹部分：選擇題（占 60 分）

### 一、單選題(占 35 分)

說明：第 1 題至第 7 題，每題 5 個選項，其中只有一個是最適當的答案，畫記在答案卡之「解答欄」。各題答對得 5 分；未作答、答錯或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 多項式 $f(x)=x^4-3x^3-5x^2+19x-60$，已知方程式 $f(x)=0$ 有一根 $-2i+1$，若整數 $a$ 滿足 $f(a)<0$，則此種 $a$ 有多少個？

(1) 5　(2) 6　(3) 7
(4) 8　(5) 無限多個

2. 平面坐標系中，已知直線 $L_1$ 與 $L_2$ 之一交角平分線方程式為 $x-y=0$，若 $L_1$： $ax+by+c=0$，($a$、$b>0$)，則 $L_2$ 之方程式為何？

(1) $bx+ay+c=0$　(2) $ax-by+c=0$　(3) $bx+ay-c=0$
(4) $bx-ay+c=0$　(5) $ax+by-c=0$

3. 欲作出函數 $y=\cos(2x+\frac{\pi}{3})$ 的圖形，只需將函數 $y=\sin 2x$ 之圖形

(1) 向右平移 $\frac{5}{12}\pi$ 單位　(2) 向左平移 $\frac{5}{12}\pi$ 單位　(3) 向右平移 $\frac{5}{6}\pi$ 單位
(4) 向左平移 $\frac{5}{6}\pi$ 單位　(5) 向左平移 $\frac{5}{3}\pi$ 單位

4. 平面坐標系中，$O$ 為原點，已知兩點 $A(3,1)$、$B(-1,3)$，若點 $P$ 滿足 $\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$，其中 $\alpha$、$\beta\in R$ 且 $\alpha+\beta=1$，則點 $P$ 之軌跡方程式為何？

(1) $(x-1)^2+(y-2)^2=5$　(2) $3x+2y-11=0$　(3) $2x-y=0$

(4) $x+2y-5=0$　(5) $\begin{cases}x=3-4t\\ y=1+2t\end{cases}$，$0\le t\le 1$

5. 圖(一)：球面 $S$ 上四點 $A$、$B$、$C$、$D$，$\overline{DA}\perp$ 平面 $ABC$，$\overline{AB}\perp\overline{BC}$，又 $\overline{DA}=\overline{AB}=\overline{BC}=\sqrt{3}$，則球面 $S$ 之直徑為何？

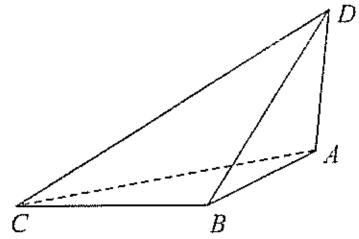
(1) $\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{6}$

(3) $2\sqrt{3}$

(4) $\dfrac{3}{2}$

(5) $3$



圖(一)

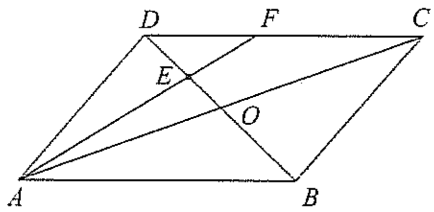
6. 若 $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，則 $\cos\alpha+\sin\alpha$ 之值為何？

(1) $\dfrac{1}{2}$　(2) $\dfrac{-1}{2}$　(3) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(4) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$　(5) $\dfrac{-\sqrt{7}}{2}$

7. 圖(二)：在平行四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 $O$ 點，$E$ 是 $\overline{OD}$ 之中點，$\overline{AE}$ 之延長線交 $\overline{CD}$ 於 $F$，若 $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BD}=\vec{b}$，則 $\overrightarrow{AF}$ 等於

(1) $\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$
(2) $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$
(3) $\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$
(4) $\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$
(5) $\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$



圖(二)

## 二、多選題(占 25 分)

說明：第 8 題至第 12 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，選出正確選項畫記在答案卡之「解答欄」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以零分計算。

8. 實係數多項函數 $f(x)$ 爲偶函數，即滿足 $f(-x)=f(x)$，且

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3 | $-2$ | 1 | 4 |

則 $f(x)=0$ 在下列哪些範圍內必有實根？

(1) $-3$ 與 $-2$ 之間
(2) $-2$ 與 $-1$ 之間
(3) $-1$ 與 0 之間
(4) 0 與 1 之間
(5) 2 與 3 之間

9. 設 $z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$，請問下列哪些選項是正確的？

(1) $z$ 爲 $x^3=1$ 之一虛根

(2) 若 $\bar{z}$ 表 $z$ 的共軛複數，則 $\bar{z}=\frac{1}{z}$

(3) $z+z^2+z^3+\ldots+z^{18}=1$

(4) $(2+z)(2+z^2)(2+z^3)(2+z^4)(2+z^5)=21$

(5) 在複數平面上，以 $z$、$z^3$、$z^5$ 所對應的點圍成一三角形，則此三角形面積爲 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

10. 已知空間中不共線相異三點 $A(-1,2,0)$、$B(2,-4,0)$、$C(3,4,5)$，則下列哪些選項是正確的？

(1) 在 $xy$ 平面上，滿足 $\overline{PA}=\overline{PB}$ 之動點 $P$ 所成圖形爲一直線

(2) 在空間中，滿足 $\overline{PA}=\overline{PB}$ 之動點 $P$ 所成圖形爲一平面

(3) 在 $z$ 軸上，滿足 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$ 之動點 $P$ 所成圖形爲一點

(4) 在 $xy$ 平面上，滿足 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$ 之動點 $P$ 所成圖形爲一點

(5) 在空間中，滿足 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$ 之動點 $P$ 所成圖形爲一直線

11. 圖(三)：正四面體 $OABC$，稜長爲 1，$P$ 點在 $\overline{OA}$ 上，$H$ 爲 $O$ 點在底面 $ABC$ 之投影點，且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{1}{6}$，請問下列哪些選項是正確的？

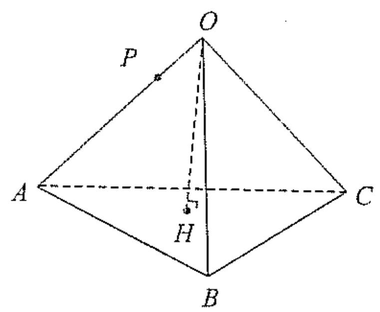
(1) $\overline{OH}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

(2) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1$

(3) $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$

(4) $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$

(5) 若 $\overrightarrow{PB}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，則數對 $(x,y)=(-\frac{1}{3},1)$




圖(三)

12. 空間中 $O(0,0,0)$、$A(-1,0,1)$、$B(1,-1,1)$、$C(2,-1,-1)$，請問下列哪些選項是正確的？

(1) $\Delta ABC$ 之面積為 $\frac{\sqrt{21}}{2}$

(2) $O$ 點到平面 $ABC$ 之距離為 $\frac{\sqrt{21}}{21}$

(3) 四面體 $OABC$ 之體積為 $\frac{1}{2}$

(4) $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 方向上之正射影為 $(\frac{3}{2},\frac{-1}{2},-1)$

(5) $B$ 點在直線 $AC$ 之投影點為 $(\frac{1}{2},\frac{-1}{2},0)$

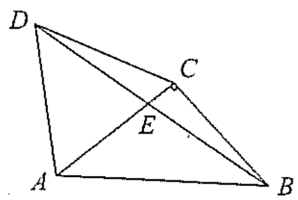
## 第貳部分：選填題(占 40 分)

| |
|---|
| 說明：1.第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「解答欄」所標示的列號(13~39)。<br>2.每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。 |

A. 把自然數 $n(n=1,2,3\ldots)$ 寫 $n^2$ 次得到的數列〈1，2，2，2，2，3，3，3，3，3，3，3，3，3，4…〉，則前 300 項的和為 <u>13 14 15 16</u>。

B. 已知函數 $f(x)=2^x$，等差數列〈$a_n$〉的公差為 2，若 $f(a_2-a_4+a_6-a_8+a_{10})=4$，則 $\log_2(f(a_1)\cdot f(a_2)\cdot f(a_3)\cdot\ldots\cdot f(a_{10}))=$ <u>17 18</u>。

C. 圖(四)：$\Delta ACD$ 為正 $\Delta$，$\Delta ABC$ 為等腰直角 $\Delta$，$\angle ACB=90^\circ$，$\overline{BD}$ 交 $\overline{AC}$ 於 $E$ 且 $\overline{AB}=2$，則 $\overline{AE}=\sqrt{19}-\sqrt{20}$。



圖(四)

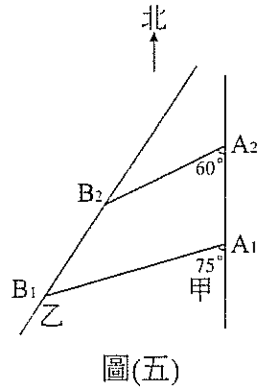
D. 設 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 皆爲首項爲 1 的無窮等比收斂級數，若 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\frac{8}{3}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n b_n)=\frac{4}{5}$，則 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2=\frac{㉑㉒}{㉓㉔}$。

E. pH 值也就是酸鹼值，是判斷液體爲酸性或鹼性的測度值，它和液體中氫離子濃度有關，假設某液體的氫離子濃度爲 $x$莫耳/公升，則其 pH 值定爲 $-\log x$。例如氫離子濃度爲 $10^{-5}$，其 pH 值爲 5，若在 25℃的環境下，純水的 pH 值爲 7，血液的 pH 值爲 7.4，則純水中氫離子的濃度大約是血液中氫離子濃度的㉕.㉖㉗㉘倍。（四捨五入到小數點後第三位）

F. 平面坐標系中，與直線 $L$：$x+y-2=0$ 及圓 $C$：$x^2+y^2-12x-12y+54=0$ 都相切的圓，其面積最小的圓方程式爲 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$，則序組 $(d,e,f)=$(㉙㉚,㉛㉜,㉝)。

G. 空間坐標系中，球面 $S$ 與 $xy$ 平面之截面圓爲 $\begin{cases}(x-2)^2+(y+1)^2=8\\ z=0\end{cases}$，若過球面上一點 $P(4,1,2)$ 之切平面 $E$ 之方程式 $ax+by+cz=12$，則序組 $(a,b,c)=$(㉞,㉟,㊱)。

H. 圖(五)所示：甲船以每小時 $30\sqrt{2}$ 浬的速度向正北方向航行，同時刻乙船按固定方向定速直線航行，當甲船位於 $A_1$ 處時，乙船位於甲船的南偏西 $75°$ 方向的 $B_1$ 處，此時兩船相距 20 浬，當甲船航行 20 分鐘到達 $A_2$ 處時，則乙船航行到甲船的南偏西 $60°$ 方向的 $B_2$ 處，此時兩船相距 $10\sqrt{2}$ 浬，則乙船每小時航行 ㊲㊳.㊴ 浬？（四捨五入到小數點後第一位）



圖(五)

參考公式及可能用到的數值

1. 空間中兩點 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 間的距離 $\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

2. 通過 $(x_1,y_1)$ 與 $(x_2,y_2)$ 的直線斜率 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，但 $x_1\neq x_2$

3. 首項爲 $a$ 且公差爲 $d$ 的等差數列前 $n$ 項之和 $S_n=\dfrac{n[2a+(n-1)d]}{2}$

   首項爲 $a$ 且公比爲 $r$ 的等比數列前 $n$ 項之和 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$，$r\neq 1$

4. $\sum_{i=1}^{n} i^2=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   $\sum_{i=1}^{n} i^3=1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

5. $P(x_0,y_0)$ 到直線 $L：ax+by+c=0$ 的距離爲 $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

6. 三角函數的和角公式 $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

   $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

7. $\Delta ABC$ 之正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$（$R$ 爲 $\Delta ABC$ 之外接圓之半徑）

   $\Delta ABC$ 之餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

8. $\sin 105°=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

9. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$、$\sqrt{3}\approx 1.732$、$\sqrt{5}\approx 2.236$、$\sqrt{6}\approx 2.449$、$\pi\approx 3.142$

10. 部分對數表

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 3010 | 3032 | 3054 | 3075 | 3096 | 3118 | 3139 | 3160 | 3181 | 3201 |
| 21 | 3222 | 3243 | 3263 | 3284 | 3304 | 3324 | 3345 | 3365 | 3385 | 3404 |
| 22 | 3424 | 3444 | 3464 | 3483 | 3502 | 3522 | 3541 | 3560 | 3579 | 3598 |
| 23 | 3617 | 3636 | 3655 | 3674 | 3692 | 3711 | 3729 | 3747 | 3766 | 3784 |
| 24 | 3802 | 3820 | 3838 | 3856 | 3874 | 3892 | 3909 | 3927 | 3945 | 3962 |
| 25 | 3979 | 3997 | 4014 | 4031 | 4048 | 4095 | 4082 | 4099 | 4116 | 4133 |
| 26 | 4150 | 4166 | 4183 | 4200 | 4216 | 4232 | 4249 | 4265 | 4281 | 4298 |
| 27 | 4314 | 4330 | 4346 | 4362 | 4378 | 4393 | 4409 | 4425 | 4440 | 4456 |
| 28 | 4472 | 4487 | 4502 | 4518 | 4533 | 4548 | 4564 | 4579 | 4594 | 4609 |
| 29 | 4624 | 4639 | 4654 | 4669 | 4683 | 4698 | 4713 | 4728 | 4742 | 4757 |
| 30 | 4771 | 4786 | 4800 | 4814 | 4829 | 4843 | 4857 | 4871 | 4886 | 4900 |
| 31 | 4914 | 4928 | 4942 | 4955 | 4969 | 4983 | 4997 | 5011 | 5024 | 5038 |
| 32 | 5051 | 5065 | 5079 | 5092 | 5105 | 5119 | 5132 | 5145 | 5129 | 5172 |
| 33 | 5185 | 5198 | 5211 | 5224 | 5237 | 5250 | 5263 | 5276 | 5289 | 5302 |
| 34 | 5315 | 5328 | 5340 | 5353 | 5366 | 5378 | 5391 | 5403 | 5416 | 5428 |

# 全國公私立高級中學100學年度學科能力測驗第三次聯合模擬考試

# 數學考科解析

考試日期：100年11月3~4日

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 2 | 4 | 5 | 1 | 3 | 234 | 24 | 1245 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 345 | 1245 | 2 | 1 | 7 | 5 | 1 | 0 | 6 | 2 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 6 | 4 | 1 | 5 | 2 | 5 | 1 | 2 | − | 4 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | |
| − | 4 | 6 | 2 | 2 | 1 | 4 | 2 | 4 | |

## 第壹部分：選擇題

### 一、單選題

1. $x=-2i+1 \Rightarrow x-1=-2i \Rightarrow (x-1)^2=(-2i)^2$

$\Rightarrow x^2-2x+1=-4 \Rightarrow x^2-2x+5=0$

$\therefore f(x)=(x^2-2x+5)(x^2-x-12)$

$f(a)<0 \Rightarrow (a^2-2a+5)(a^2-a-12)<0$

$\Rightarrow (a^2-2a+5)(a+3)(a-4)<0$

$\because a^2-2a+5>0$ 恆成立

$\therefore (a+3)(a-4)<0 \Rightarrow -3<a<4$

$\because a\in Z \therefore a=-2,-1,0,1,2,3$

2. $L_2$ 即為 $L_1$ 關於直線 $x-y=0$ 之鏡像

3. $y=\cos(2x+\frac{\pi}{3})=\sin(2x+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2})$

即 $y=\sin(2x+\frac{5\pi}{6})=\sin 2(x+\frac{5\pi}{12})$

$\therefore y=\sin 2x$ 向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 單位

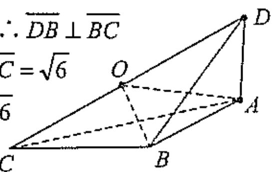
得 $y=\sin 2(x+\frac{5\pi}{12})=\cos(2x+\frac{\pi}{3})$

4. $\because \overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ 且

$\alpha+\beta=1 \therefore P$ 之軌跡為直線 $AB$

其方程式：$\frac{y-1}{x-3}=-\frac{1}{2} \Rightarrow x+2y-5=0$

5. $\because \overline{DA}\perp$ 平面 $ABC$ 又 $\overline{AB}\perp\overline{BC} \therefore \overline{DB}\perp\overline{BC}$




$\Delta ABC$ 中，$\overline{AB}=\overline{BC}=\sqrt{3} \therefore \overline{AC}=\sqrt{6}$

$\Delta DAC$ 中，$\overline{DA}=\sqrt{3}$，$\overline{AC}=\sqrt{6}$

$\therefore \overline{DC}=3$ 即為球面 $S$ 之直徑

($\because$取 $\overline{CD}$ 之中點 $O$，在直角 $\Delta DAC$ 中，

$\overline{OA}=\overline{OC}=\overline{OD}$，在直角 $\Delta DBC$ 中，$\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}$

$\therefore \overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD} \therefore O$ 為球心，$\overline{DC}$ 為直徑)

6. $\because \frac{\cos 2\alpha}{\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow 2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=-\sqrt{2}(\sin\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\cos\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{2}})$

$\Rightarrow 2(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)=\cos\alpha-\sin\alpha$

$\Rightarrow \cos\alpha+\sin\alpha=\frac{1}{2}$ ($\because \sin(\alpha-\frac{\pi}{4})\neq 0 \therefore \cos\alpha\neq\sin\alpha$ )

7. $\overline{DF}:\overline{AB}=\overline{DE}:\overline{BE}=1:3$

$\begin{cases}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{a} & —① \\ \overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\vec{b} & —②\end{cases}$ 由①、②得 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$

$\therefore \overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$=(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b})+\frac{1}{3}(\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b})=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

### 二、多選題

8. 多項函數 $f(x)$ 滿足 $f(-x)=f(x)$

$\therefore$

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 4 | 1 | $-2$ | 3 | $-2$ | 1 | 4 |

$\therefore f(-2)f(-1)<0$，$f(-1)f(0)<0$，$f(0)f(1)<0$

9. $z=\cos\frac{2\pi}{6}+i\sin\frac{2\pi}{6}$

$\Rightarrow$(1) $z^6=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$

$\therefore z$ 為 $x^6=1$ 之一虛根

(2) $z\cdot\bar{z}=|z|^2=1$，$\therefore \bar{z}=\frac{1}{z}$

(3) $z+z^2+z^3+\ldots+z^{18}=\frac{z\cdot(1-z^{18})}{1-z}=0$ ($\because z^{18}=1$)

(4) $x^6=1 \Rightarrow (x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=0$

$\Rightarrow x=1$、$z$、$z^2$、$z^3$、$z^4$、$z^5$

$\therefore x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

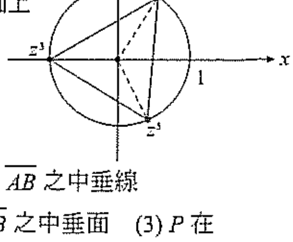
$=(x-z)(x-z^2)(x-z^3)(x-z^4)(x-z^5)$

$x=-2$ 代，$-21=(-1)^5(2+z)(2+z^2)(2+z^3)(2+z^4)(2+z^5)$

$\therefore (2+z)(2+z^2)(2+z^3)(2+z^4)(2+z^5)=21$

(5)以 $z$、$z^3$、$z^5$ 所對應的點

圍成一正三角形且在半徑為 1 的圓上




$\therefore$此三角形面積 $3\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin\frac{2\pi}{3}$

$=3\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

10. (1) $xy$ 平面上，動點 $P$ 之軌跡即為 $\overline{AB}$ 之中垂線 (2)空間中，動點 $P$ 之軌跡即為 $\overline{AB}$ 之中垂面 (3) $P$ 在 $z$ 軸上，令 $P(0,0,z)$，$\overline{PA}\neq\overline{PB}$ 恆成立，$\therefore$無解 (4) 在 $xy$ 平面上，滿足 $\overline{PA}=\overline{PB}$ 之 $P$ 的軌跡為 $\overline{AB}$ 之中垂

線 $L$

而 $\overline{PB}=\overline{PC}$ 之 $P$ 的軌跡爲 $\overline{BC}$ 之中垂面 $E$

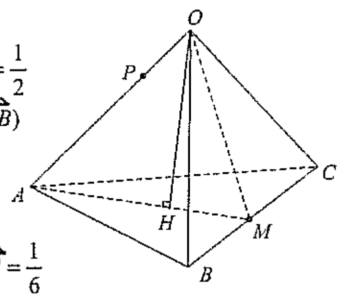
$\because P$ 在 $xy$ 平面上 $\therefore P$ 爲 $L$ 與 $E$ 之交點 (5)空間中，滿足 $\overline{PA}=\overline{PB}$ 之 $P$ 的軌跡爲 $\overline{AB}$ 之中垂面 $E_1$，滿足 $\overline{PB}=\overline{PC}$ 之 $P$ 的軌跡爲 $\overline{BC}$ 之中垂面 $E_2$，滿足 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$ 之 $P$ 的軌跡即爲 $E_1$ 與 $E_2$ 之交線

11. (1)取 $\overline{BC}$ 之中點 $M$，

則 $\overline{OM}=\overline{AM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$、$\overline{HM}=\dfrac{1}{3}\overline{AM}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

$\therefore \overline{OH}=\sqrt{\overline{OM}^2-\overline{HM}^2}=\sqrt{(\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2-(\dfrac{\sqrt{3}}{6})^2}$

$=\sqrt{\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{12}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$




(2) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$

(3) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$

$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=0 \therefore \overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$

(4)令 $\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA}$ $\because \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PB}=\dfrac{1}{6}$

$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})=\dfrac{1}{6}\Rightarrow\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}-t\overrightarrow{OA})=\dfrac{1}{6}$

$\Rightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-t|\overrightarrow{OA}|^2=\dfrac{1}{6}\Rightarrow\dfrac{1}{2}-t=\dfrac{1}{6}$

$\therefore t=\dfrac{1}{3}\therefore\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}$

(5) $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

$\therefore$數對 $(x,y)=(-\dfrac{1}{3},1)$

12. $\overrightarrow{AB}=(2,-1,0)$，$\overrightarrow{AC}=(3,-1,-2)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}-1&0\\-1&-2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&2\\-2&3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&-1\\3&-1\end{vmatrix}\right)=(2,4,1)$

(1) $\Delta ABC$ 之面積 $=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$

(2)平面 $ABC$ 之法向量 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(2,4,1)$

$\therefore$平面 $ABC$ ： $2(x+1)+4(y-0)+(z-1)=0$

$\Rightarrow 2x+4y+z+1=0 \therefore d(O,\text{平面}ABC)=\dfrac{1}{\sqrt{21}}=\dfrac{\sqrt{21}}{21}$

(3)四面體 $OABC$ 之體積

$=\dfrac{1}{3}\Delta ABC\cdot d(O,\text{平面}ABC)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{21}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{21}}{21}=\dfrac{1}{6}$

(4) $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 方向上之正射影爲

$\overrightarrow{AH}=(\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2})\overrightarrow{AC}=(\dfrac{7}{14})(3,-1,-2)=\dfrac{1}{2}(3,-1,-2)$

(5) $B$ 點在直線 $AC$ 之投影點 $H(x,y,z)$

由 $\overrightarrow{AH}=(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2},-1)$

$(x+1,y,z-1)=(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2},-1)$

$\therefore H(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},0)$

## 第貳部分：選填題

A. $1^2+2^2+3^2+\ldots+9^2=285$

$\therefore$前 300 項的和

$=1^2\cdot1+2^2\cdot2+3^2\cdot3+\ldots+9^2\cdot9+15\times10$

$=1^3+2^3+3^3+\ldots+9^3+150=(\dfrac{9\cdot10}{2})^2+150=2175$

B. $\because f((a_1+d)-(a_1+3d)+(a_1+5d)-(a_1+7d)$

$+(a_1+9d))=4$

$\Rightarrow f(a_1+5d)=4\Rightarrow 2^{a_1+5d}=4 \therefore a_1+5d=2 \because d=2$

$\therefore a_1=-8 \therefore \log_2(f(a_1)\cdot f(a_2)\cdot f(a_3)\cdot\ldots\cdot f(a_{10}))$

$=\log_2 f(a_1)+\log_2 f(a_2)+\log_2 f(a_3)+\ldots+\log_2 f(a_{10})$

$=\log_2 2^{a_1}+\log_2 2^{a_2}+\log_2 2^{a_3}+\ldots+\log_2 2^{a_{10}}$

$=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{10}=\dfrac{10\cdot(2a_1+9d)}{2}=5(2a_1+9d)$

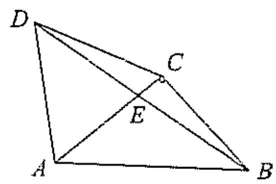
$=5(-16+18)=10$

C. $\angle BCD=90^\circ+60^\circ=150^\circ$，$\overline{CB}=\overline{AC}=\overline{CD}$

$\therefore \angle CBE=15^\circ$，$\Delta ABE$ 中，

$\angle ABE=45^\circ-15^\circ=30^\circ$

$\angle AEB=90^\circ+15^\circ=105^\circ$




由正弦定理知

$\dfrac{\overline{AE}}{\sin\angle ABE}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin\angle AEB}$

$\Rightarrow\dfrac{\overline{AE}}{\sin30^\circ}=\dfrac{2}{\sin105^\circ}$

$\therefore \overline{AE}=\dfrac{2}{\sin105^\circ}\times\sin30^\circ=\dfrac{2}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\times\dfrac{1}{2}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

D. 由 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\frac{8}{3}$ 得

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{8}{3}\Rightarrow\frac{1}{1-r_1}+\frac{1}{1-r_2}=\frac{8}{3}\cdots\cdots$①

又 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\frac{4}{5}\Rightarrow\frac{1}{1-r_1r_2}=\frac{4}{5}\cdots\cdots$②

由② $5=4-4r_1r_2\Rightarrow r_1r_2=\dfrac{-1}{4}\cdots\cdots$③

由① $\dfrac{2-(r_1+r_2)}{(1-r_1)(1-r_2)}=\dfrac{8}{3}\Rightarrow\dfrac{2-(r_1+r_2)}{1-(r_1+r_2)-\frac{1}{4}}=\dfrac{8}{3}$

$\Rightarrow r_1+r_2=0\cdots\cdots$④

由③④得 $\begin{cases}r_1=\dfrac{1}{2}\\r_2=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ or $\begin{cases}r_1=-\dfrac{1}{2}\\r_2=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

$\displaystyle\therefore\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+2\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$

$=\dfrac{1}{1-r_1^2}+\dfrac{1}{1-r_2^2}+2\cdot\dfrac{4}{5}=\dfrac{64}{15}$

E. 設純水中氫離子濃度爲 $x_1$ 莫耳/公升，血液中氫離子濃度爲 $x_2$ 莫耳/公升，則 $-\log x_1=7$、$-\log x_2=7.4$

$\therefore \log\dfrac{x_1}{x_2}=\log x_1-\log x_2=-7+7.4=0.4$

令 $\alpha=\dfrac{x_1}{x_2}$

查表得 $\log 2.51=0.3997$、

$\log 2.52=0.4014$

| | |
|---|---|
| 2.51 | 0.3997 |
| $\alpha$ | 0.4 |
| 2.52 | 0.4014 |

由線性內插法

得 $\dfrac{\alpha-2.51}{2.52-2.51}=\dfrac{0.4-0.3997}{0.4014-0.3997}$ 得 $\alpha=2.512$

F. 圓 $C$ ： $(x-6)^2+(y-6)^2=18$ ，

圓心 $C(6,6)$ ，半徑 $3\sqrt{2}$ ，

$C(6,6)$ 到直線

$L$ ： $x+y-2=0$ 之距離爲 $d=\dfrac{|6+6-2|}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$

$\therefore$ 所求圓之直徑 $2r=5\sqrt{2}-3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ $\therefore r=\sqrt{2}$

$\because$ 所求圓心在過 $C(6,6)$ 且垂直 $L$ 之直線 $L'$ ： $x-y=0$

上，令圓心 $A(t,t)$ $\because r=\sqrt{2}$ $\therefore \dfrac{|2t-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$\therefore t=2$ 或 0(不合) $\therefore$ 圓心 $A(2,2)$

$\therefore$ 此圓之方程式：

$(x-2)^2+(y-2)^2=(\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2+y^2-4x-4y+6=0$

G. 截面圓心 $A(2,-1,0)$ ，半徑 $2\sqrt{2}$

$\therefore$ 球面 $S$ 之球心 $S$

可令爲 $S(2,-1,t)$ 球半徑 $\sqrt{t^2+8}$

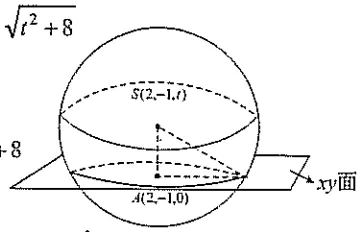
$\because$ 球面過 $P(4,1,2)$

$\therefore \overline{PS}=\sqrt{t^2+8}$

$\Rightarrow 2^2+2^2+(2-t)^2=t^2+8$

$\Rightarrow -4t+12=8 \Rightarrow t=1$

$\therefore$ 球心 $S(2,-1,1)$




過 $P(4,1,2)$ 之切平面的法向量 $\overrightarrow{SP}=(2,2,1)$

$\therefore$ 切平面： $2(x-4)+2(y-1)+(z-2)=0$

$\Rightarrow 2x+2y+z=12$

H. 連 $\overline{A_1B_2}$ $\because \overline{A_2B_2}=10\sqrt{2}$

又 $\overline{A_1A_2}=30\sqrt{2}\times\dfrac{20}{60}=10\sqrt{2}$

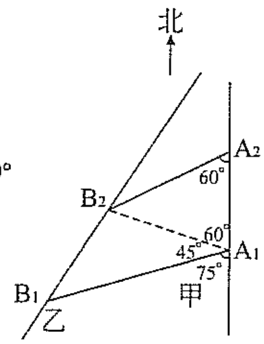
$\therefore \overline{A_1A_2}=\overline{A_2B_2}$ 又 $\angle A_1A_2B_2=60^\circ$

$\therefore \Delta A_1A_2B_2$ 爲正 $\Delta$

$\therefore \overline{A_1B_2}=10\sqrt{2}$ $\because \overline{A_1B_1}=20$ ，

$\angle B_1A_1B_2=105^\circ-60^\circ=45^\circ$

$\Delta A_1B_2B_1$ 中，由餘弦定理




$\overline{B_1B_2}^2=20^2+(10\sqrt{2})^2-2\cdot 20\cdot 10\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=200$

$\therefore \overline{B_1B_2}=10\sqrt{2}$

$\therefore$ 乙船時速 $10\sqrt{2}\div\dfrac{1}{3}=30\sqrt{2}$

$=30\times 1.414=42.4$ 浬/時