

全國公私立高級中學

101 學年度學科能力測驗第一次聯合模擬考試

考試日期：101 年 7 月 23~24 日

數學考科

— 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 7 題，多選題 6 題，選填題第 A 至 G 題共 7 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。

未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{18}{19}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ 時，則考生必須分別在答案

卡的第 18 列的 $\frac{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\frac{8}{\square}$ 畫記，如：

18	$\frac{1}{\square}$	$\frac{2}{\square}$	$\frac{3}{\blacksquare}$	$\frac{4}{\square}$	$\frac{5}{\square}$	$\frac{6}{\square}$	$\frac{7}{\square}$	$\frac{8}{\square}$	$\frac{9}{\square}$	$\frac{0}{\square}$	-	±
19	$\frac{1}{\square}$	$\frac{2}{\square}$	$\frac{3}{\square}$	$\frac{4}{\square}$	$\frac{5}{\square}$	$\frac{6}{\square}$	$\frac{7}{\square}$	$\frac{8}{\blacksquare}$	$\frac{9}{\square}$	$\frac{0}{\square}$	-	±

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{20(21)}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列

的 $\frac{\square}{\square}$ 與第 21 列的 $\frac{7}{\square}$ 畫記，如：

20	$\frac{1}{\square}$	$\frac{2}{\square}$	$\frac{3}{\square}$	$\frac{4}{\square}$	$\frac{5}{\square}$	$\frac{6}{\square}$	$\frac{7}{\square}$	$\frac{8}{\square}$	$\frac{9}{\square}$	$\frac{0}{\square}$	-	±
21	$\frac{1}{\square}$	$\frac{2}{\square}$	$\frac{3}{\square}$	$\frac{4}{\square}$	$\frac{5}{\square}$	$\frac{6}{\square}$	$\frac{7}{\blacksquare}$	$\frac{8}{\square}$	$\frac{9}{\square}$	$\frac{0}{\square}$	-	±

※ 試題後附有參考公式及可能用到的數值

祝考試順利

第壹部分：選擇題（占65分）

一、單選題(占35分)

說明：第1題至第7題，每題有5個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得5分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設三次整係數多項式函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx-12$ 的圖形與 x 軸恰交於相異兩點 $(m,0)$ 與 $(n,0)$ ，其中 $m、n$ 皆為正有理數，則 a 的最大值為下列何者？

- (1) -14 (2) -7 (3) 0
(4) 7 (5) 14

2. 將 $y=2^x$ 的圖形先對 y 軸作對稱，再對 x 軸作對稱後，所得到的圖形之方程式為下列何者？

- (1) $y=(\frac{1}{2})^x$ (2) $y=-(\frac{1}{2})^x$ (3) $x=-2^y$
(4) $y=\log_2 x$ (5) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$

3. 對任意實數 x ，若不等式 $|x| \geq ax$ 恆成立。則實數 a 的最大範圍為下列何者？

- (1) $-1 \leq a \leq 1$ (2) $0 \leq a \leq 1$ (3) $-1 \leq a \leq 0$
(4) $a \geq 1$ 或 $a \leq -1$ (5) $a \geq 1$ 或 $a \leq 0$

4. 設 $a < b$ ，試比較下列各數的大小：

$$A = \frac{a+b}{2}, B = \frac{2a+b}{3}, C = \frac{a+3b}{4}, D = \frac{3a+2b}{5}, E = \frac{11b-4a}{7}, \text{ 下列何者為正確?}$$

- (1) $C < A < B < D < E$ (2) $E < C < A < B < D$ (3) $E < B < D < A < C$
 (4) $D < B < A < C < E$ (5) $B < D < A < C < E$

5. 有一生物實驗室發現一種細菌，每一個細菌經過 1 小時會自行分裂成為兩個細菌。若現有一培養皿，當中有 10 個細菌，則 20 小時後(設此時間內無死亡並可一再分裂)，培養皿中大約有多少個細菌？

- (1) 一百萬 (2) 五百萬 (3) 七百萬
 (4) 一千萬 (5) 兩千萬

6. 設 $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ，其中 a 、 b 及 c 均為複數，且已知 $p(16i) = p(-1) = p(81) = 0$ 。試問方程式 $x^{12} + ax^8 + bx^4 + c = 0$ 有多少個根 不是 實數？

- (1) 4 (2) 6 (3) 8
 (4) 10 (5) 12

7. 設函數 $f(x)$ 為正實數 x 的純小數部分，

$$\text{則化簡 } f\left(\frac{2 \times 1}{2012}\right) + f\left(\frac{2 \times 2}{2012}\right) + f\left(\frac{2 \times 3}{2012}\right) + \cdots + f\left(\frac{2 \times 2012}{2012}\right) \text{ 的值應為下列何者?}$$

- (1) 502 (2) 503 (3) 1004
 (4) 1005 (5) 1006

二、多選題(占 30 分)

說明：第 8 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

8. 設 a, b, c, d 為實數，則下列選項哪些是正確的？
- (1) $\frac{10549}{385}$ 可化成有限小數
 - (2) 若 $a+b$ 為有理數、 $a-b$ 為無理數，則 a^2-b^2 必為無理數
 - (3) 若 $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$ ，則 $a=c$ 且 $b=d$
 - (4) 若 $a^2 < b^2$ ，則 $|a| < |b|$
 - (5) 若 $|a-2|:|a+6|=1:3$ ，則 $a=0$
9. 若 $a = \log_2 3$ ， $b = \log_3 2$ ， $c = \log_{20} 30$ ， $d = \log_{30} 20$ ， $e = \log_{0.3} 0.2$ ， $f = \log_{0.2} 0.3$ ，則下列選項哪些是正確的？
- (1) $a > c$
 - (2) $a > d$
 - (3) $b > d$
 - (4) $b > e$
 - (5) $e > f$
10. 設二次函數 $f(x) = x^2 + bx + 1$ ，其中 b 為實數， $i = \sqrt{-1}$ ，則下列選項哪些是正確的？
- (1) 若函數最小值為 -3 ，則 $b=4$ 或 $b=-4$
 - (2) 若函數圖形與直線 $y=x$ 交於相異兩點，則 $b > 3$ 或 $b < -1$
 - (3) 若 k 為非零實數且 $\frac{1}{2} + k \cdot i$ 為方程式 $f(x) = 0$ 的一根，則 $b=1$
 - (4) 若有正實數 α 滿足 $f(\alpha) = 0$ ，則 $b \geq 2$
 - (5) 若方程式 $f(x) = 0$ 有二相異實根，且在 $0 \leq x \leq 3$ 的範圍內恰有一根，則 $b < -\frac{10}{3}$

11. 右表為三次實係數多項式函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的部分函數值，試問下列選項哪些是正確的？

x	$f(x)$
-2	4
-1	-3
0	2
1	-2

- (1) 方程式 $f(x) = 0$ 有 3 個相異實根
- (2) $f(x)$ 除以 $(x+2)$ 的餘式為 4
- (3) $f(x)$ 除以 $x(x-1)$ 的餘式為 $4x+2$
- (4) $a = -\frac{7}{2}$
- (5) $f(2) = -20$

12. 設等比數列 $a_n = 3^n$ ，且 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ，則下列選項哪些是正確的？

- (1) a_7 是 3 位數
- (2) a_{101} 是 49 位數
- (3) S_n 也是一等比數列
- (4) S_{20} 的最高位數字為 5
- (5) S_{20} 是 10 位數

13. 設 m, b 皆為實數，二次函數 $f(x) = x^2$ 的圖形與函數 $g(x) = mx + b^2$ 的圖形交於 A, B 相異兩點，二次函數 $f(x) = x^2$ 的圖形與函數 $h(x) = mx + (b^2 + 7)$ 的圖形交於 C, D 相異兩點，其中 A, D 位於第一象限， B, C 位於第二象限，則下列選項哪些是正確的？

- (1) 若 A, B 及原點為一個正三角形的三頂點，則 $b^2 = \frac{3}{2}$
- (2) 四邊形 $ABCD$ 一定不是平行四邊形
- (3) 四邊形 $ABCD$ 一定是一個高為 7 的梯形
- (4) 若四邊形 $ABCD$ 為一個等腰梯形，則 $m = 0$
- (5) 若四邊形 $ABCD$ 為一個等腰梯形且面積為 21，則 $b^2 = \frac{1}{9}$

第貳部分：選填題(占 35 分)

說明：1. 第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號(14-28)。

2. 每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 試問有幾個實數 x 可以使得 $\sqrt{150-\sqrt{x}}$ 為整數？答：⑭⑮ 個。

B. 設 $i=\sqrt{-1}$ 且非零實數 a 使得方程式 $(1+i)x^2+x+a(1-i)=0$ 恰有一個實數解，求 a 的值為 $\frac{\textcircled{16}}{\textcircled{17}}$ 。(化為最簡分數)

C. 若 $(\sqrt{10+\sqrt{19}})^3 - (\sqrt{10-\sqrt{19}})^3 = a\sqrt{2} + b$ ，其中 a, b 為有理數，則數對 $(a, b) = (\textcircled{18}\textcircled{19}, \textcircled{20})$ 。

D. 方程式 $|x^2 - 2x - 1| = 2x - 3$ 的所有實根的和為 ⑳ + $\sqrt{\textcircled{22}}$ 。

E. 設 $f(x) = \log_2 x$ ， $g(x) = \log_4 x$ 。若 $y = k$ 與 $f(x)$ 、 $g(x)$ 分別交於 A 、 B 兩點，且 $\overline{AB} = 12$ ，則 $k = \textcircled{23}$ 。

F. 設 $f(x) = \log_2(x-1)$ ， $g(x) = \log_2(x+10)$ 。若 $x = k$ 與 $f(x)$ 、 $g(x)$ 分別交於 A 、 B 兩點，則滿足 $\overline{AB} \geq 1$ 的正整數 k 有 ⑳㉕ 個。

- G. 小明是個國一的學生，爸爸幫他在銀行存了 100 萬當就學基金，已知銀行的年利率為 4%，並以半年為一期複利計息。若 10 年之後小明大學畢業後想出國念書，則此時他的就學基金共有約 262728 萬元。(四捨五入取到萬元)

常用對數表

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2557	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a 且公差為 d 的等差數列前 n 項之和 $S_n = \frac{n[2a + (n-1)d]}{2}$
首項為 a 且公比為 r 的等比數列前 n 項之和 $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, $r \neq 1$
2. (1) $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
(2) $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
(3) $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$
(4) $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$
3. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ 、 $\sqrt{3} \approx 1.732$ 、 $\sqrt{5} \approx 2.236$ 、 $\sqrt{6} \approx 2.449$ 、 $\pi \approx 3.142$
4. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$
5. 複利計算：若本金為 A ，利率 = $r\%$ ，期數為 n ，則本利和為 $A(1 + \frac{r}{100})^n$