

# 全國公私立高級中學

## 101 學年度學科能力測驗第二次聯合模擬考試

考試日期：101 年 9 月 5~6 日

### 數學考科

#### — 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 7 題，選填題第 A 至 G 題共 7 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。

未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是  $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是  $\frac{3}{8}$  時，則考生必須分別在答案

卡的第 18 列的  $\overset{3}{\square}$  與第 19 列的  $\overset{8}{\square}$  畫記，如：

|    |                        |                        |                             |                        |                        |                        |                        |                             |                        |                        |                        |                          |
|----|------------------------|------------------------|-----------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|-----------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|--------------------------|
| 18 | $\overset{1}{\square}$ | $\overset{2}{\square}$ | $\overset{3}{\blacksquare}$ | $\overset{4}{\square}$ | $\overset{5}{\square}$ | $\overset{6}{\square}$ | $\overset{7}{\square}$ | $\overset{8}{\square}$      | $\overset{9}{\square}$ | $\overset{0}{\square}$ | $\overset{-}{\square}$ | $\overset{\pm}{\square}$ |
| 19 | $\overset{1}{\square}$ | $\overset{2}{\square}$ | $\overset{3}{\square}$      | $\overset{4}{\square}$ | $\overset{5}{\square}$ | $\overset{6}{\square}$ | $\overset{7}{\square}$ | $\overset{8}{\blacksquare}$ | $\overset{9}{\square}$ | $\overset{0}{\square}$ | $\overset{-}{\square}$ | $\overset{\pm}{\square}$ |

例：若第 C 題的答案格式是  $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是  $\frac{-7}{50}$  時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列

的  $\overset{-}{\square}$  與第 21 列的  $\overset{7}{\square}$  畫記，如：

|    |                        |                        |                        |                        |                        |                        |                             |                        |                        |                        |                             |                          |
|----|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|-----------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|-----------------------------|--------------------------|
| 20 | $\overset{1}{\square}$ | $\overset{2}{\square}$ | $\overset{3}{\square}$ | $\overset{4}{\square}$ | $\overset{5}{\square}$ | $\overset{6}{\square}$ | $\overset{7}{\square}$      | $\overset{8}{\square}$ | $\overset{9}{\square}$ | $\overset{0}{\square}$ | $\overset{-}{\blacksquare}$ | $\overset{\pm}{\square}$ |
| 21 | $\overset{1}{\square}$ | $\overset{2}{\square}$ | $\overset{3}{\square}$ | $\overset{4}{\square}$ | $\overset{5}{\square}$ | $\overset{6}{\square}$ | $\overset{7}{\blacksquare}$ | $\overset{8}{\square}$ | $\overset{9}{\square}$ | $\overset{0}{\square}$ | $\overset{-}{\square}$      | $\overset{\pm}{\square}$ |

※ 試題後附有參考公式及可能用到的數值

祝考試順利





7. 設  $f(x)$  為三次實係數多項式，若  $f(x) > 0$  的解為  $x < -1$  或  $2 < x < 6$ ，考慮不等式  $(x^2 - 1)^2 f(3x) \leq 0$ ，下列哪些選項是它的一個解？

(1)  $-\frac{1}{\sqrt{5}}$

(2)  $-1$

(3)  $\pi$

(4)  $2\pi$

(5)  $\sqrt{3}$

8. 下列有關標準差與平均值(算術平均數)的敘述，哪些是正確的？

(1) 考慮某班的體重標準差大於該班身高標準差，代表該班同學的體重差異程度大於身高的差異程度

(2) 考慮甲乙兩個班級，如果甲班的體重平均值比乙班大，則甲班的體重標準差也比乙班大

(3) 如果將甲乙兩個班級的體重資料合併，則合併後體重的平均值一定介於原來兩班相異體重平均值之間

(4) 考慮將甲乙兩個班級的體重資料合併，則合併後體重的標準差一定介於原來兩班相異體重標準差之間

(5) 考慮甲班 40 位學生的體重，若知道其平均值  $\leq 60$  公斤且標準差  $\leq 2$  公斤，我們還是不能確定是否有人體重超過 70 公斤

9. 試問下列選項哪些正確？

(1)  $\sqrt[3]{(-3)^5} = (-3)^{\frac{5}{3}}$

(2)  $\pi^3 < 3^\pi$

(3) 方程式  $3^x + 3^{-x} = \sqrt{3}$  的  $x$  有實數解

(4)  $3^{3.1} + 3^{3.3} > 2 \cdot 3^{3.2}$

(5)  $9^{100} + 2^{100} > 6^{100} + 5^{100} + 4^{100} + 3^{100}$

10. 設  $f(x) = \log_5 x$ ，試問下列哪些選項的敘述是正確的？
- (1) 若點  $(a, b)$  落在函數  $y = 5^x$  圖形上，則點  $(b, a)$  必落在  $y = f(x)$  圖形上
  - (2) 若  $x_1, x_2$  為相異兩正實數，則  $f(x_1) + f(x_2) > 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$
  - (3) 若  $a \geq 3$ ，則方程式  $x = \log_a x$  不可能有  $x$  的實數解
  - (4) 若  $a > 0$  且  $a \neq 1$ ，則方程式  $a^x = \log_a x$  必有  $x$  的實數解
  - (5) 若  $y = f(x)$  與直線  $L$  交於  $(2, \log_5 2)$  與  $(10, \log_5 10)$ ，則  $L$  的斜率為  $\frac{1}{8}$
11. 箱子中有 12 顆大小相同的球，其中有 5 個是紅球，4 個是白球，3 個是黃球。假設每個球被取到的機會均相等，現在從箱子中取球，一次取一顆，看過顏色後不放回。試問下列選項哪些正確？
- (1) 第一次取中白球的機率為  $\frac{1}{3}$
  - (2) 最後一球為白球的機率為  $\frac{1}{3}$
  - (3) 第一次取中白球的條件下，第三次也取中白球的機率為  $\frac{1}{11}$
  - (4) 第一次取中白球且第三次取中白球的機率為  $\frac{1}{11}$
  - (5) 取到第四次時恰為白球出現第三次的機率為  $\frac{8}{165}$
12. 設有一組 10 筆的資料，所有的數值皆為整數，且當中最小的數值是 4，資料全距為 10。設此資料的標準差最大可能值為  $a$  與最小可能值為  $b$ ，試問下列選項哪些正確？
- (1)  $a = 5$
  - (2)  $b = \sqrt{3}$
  - (3)  $a + b$  是無理數
  - (4) 若此組資料改為 12 筆資料，其餘條件都不變，則  $a$  值不變
  - (5) 若此組資料改為 12 筆資料，其餘條件都不變，則  $b$  值不變

13. 最近因為美元匯率低，所以市面上流行一種以美元計價的終身保險，每年繳費一次，連繳六年，保額年年遞增，今某人在年初參加這項保險，每年初固定繳費 14400 美元，連續繳六次，若保額現金值以年利率 3.7% 複利計算，試問下列哪些正確？

(1) 所繳的全部保費為  $\sum_{i=5}^{10} 14400$  美元

(2) 從第一次繳費開始，結算到剛繳完第六次保費當時為止，此人總保額現金值累積為  $14400 \sum_{i=1}^6 \left(\frac{1037}{1000}\right)^i$

(3) 繳完六年保費，結算至十年期滿時，此人總保額現金值累積為  $14400 \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{1037}{1000}\right)^i$

(4) 繳完六年保費，結算至十年期滿時，此人總保額現金值累積為  $14400 \sum_{i=1}^6 \left(\frac{1037}{1000}\right)^{i+4}$

(5) 繳完六年保費，結算至  $n$  年期滿時 ( $n \geq 6$ )，此人總保額現金值累積為

$$14400 \sum_{i=1}^6 \left(\frac{1037}{1000}\right)^{n-i}$$

### 第貳部分：選填題(占 35 分)

說明：1. 第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「解答欄」所標示的列號(14~32)。

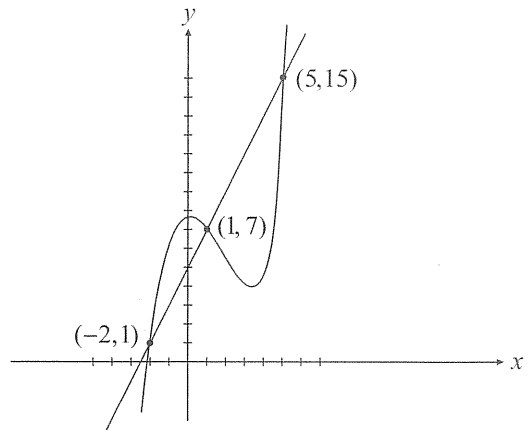
2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 設  $f(x) = 3x^3 + bx^2 + cx + d$ ， $b, c, d$  均為實數，

若  $y = f(x)$  與  $y = 2x + 5$  相交圖形如右：

且  $f(x) = a_3(3x - 5)^3 + a_2(3x - 5)^2 + a_1(3x - 5) + a_0$ ，

求  $a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = \underline{\textcircled{14} \textcircled{15} \textcircled{16}}$ 。



- B. 設  $f(x)$  為三次實係數多項式，若滿足  $f(1)=3, f(2)=10, f(-1)=-17, f(4)=78$ ，求  $(x^2+1)f(x)$  除以  $x-3$  之餘式為 17 18 19。
- C. 設實數  $x$  滿足  $\log(-x^2+2x+8)$  有意義，化簡  $\sqrt{\frac{16+x^2}{2}+4x} + \sqrt{\frac{25+x^2}{2}-5x}$  為  $\frac{20\sqrt{21}}{2}$ 。
- D. 設一排有 10 個座位的座椅，若同時來了 6 個人，任意入座此排座椅，試問所留下的 4 個空位均不相鄰的機率為  $\frac{22}{23}$ 。
- E. 設  $a$  是正實數，且  $a=n+x$ ，其中  $n$  為整數且  $0 < x < 1$ ，若  $a^2+x^2=28$ ，試求  $x$  為  $\frac{\sqrt{24 \cdot 25} - 26}{27}$ 。
- F. 一段長途開車旅程，沿途依序會經過 15 個休息站，某人只想從中選 3 個停靠休息，且第一次休息至少要先通過前 3 個休息站，第二、三次休息也都至少要再通過 2 個休息站才作停靠休息，試問如此下來他有 28 29 種不同選擇停靠休息站的方法。
- G. 在右邊  $\square\square\square\square\square\square$  這 6 個區域，任意塗上紅色、黃色或綠色，每個區域塗一色，求紅色不相鄰的塗法有 30 31 32 種。(包含紅色沒用或只用一次)

參考公式及可能用到的數值

1. 一元二次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  的公式解：
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2. 平面上兩點  $P_1(x_1, y_1)$ ， $P_2(x_2, y_2)$  間的距離為  $\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

3. 條件機率  $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

4. 算術平均數：
$$\mu = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

標準差：
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$$

相關係數：
$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

5. 參考數值： $\pi \approx 3.14$

6. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log 3.14 \approx 0.4969$

7. 等差級數： $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$