

臺中區國立高級中學 102 學年度 大學入學第一次學科能力測驗聯合模擬考

數學考科

考試日期：102 年 11 月 7~8 日

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 5 題，多選題 6 題，選填題第 A 至 I 題共 9 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{18}{19}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡的第 18 列的 $\frac{3}{19}$ 與第 19 列的 $\frac{8}{19}$ 畫記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{2021}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在

答案卡的第 20 列的 $\frac{-7}{50}$ 與第 21 列的 $\frac{7}{50}$ 畫記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±

※ 試題後附有參考公式及可能用到的數值



第壹部分：選擇題(占 55 分)

一、單選題(占 25 分)

說明：第 1 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 試問 $|2x+1|+|x-3|\leq 5$ 的整數解有幾個？

- (1) 0
- (2) 1
- (3) 2
- (4) 3
- (5) 4

2. 某班抽考數學與英文兩科，抽出 6 位同學，他們的數學與英文成績如下表，

數學成績(分)X	65	85	95	65	75	65
英文成績(分)Y	50	70	70	40	70	60

則數學成績(X)與英文成績(Y)的相關係數為何？

- (1) 0.6
- (2) 0.75
- (3) 0.8
- (4) 0.85
- (5) 0.9

3. 承上題，利用最小平方法求得英文成績(Y)對數學成績(X)的最適合直線，若某生的數學成績為 71 分時，試利用此直線估計其英文成績應為幾分？

- (1) 53
- (2) 55
- (3) 57
- (4) 59
- (5) 61

4. 試利用下列對數表，求 $\sqrt{8}^{\sqrt{8}}$ 的近似值為何？

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404

- (1) 18.2
- (2) 18.9
- (3) 19.6
- (4) 20.3
- (5) 21.0

5. 有一過原點的直線 L ，其斜率為 m 且 m 為正整數，與圓 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$ 交於相異兩點 A, B ，若 $\overline{AB} = \sqrt{6}$ ，則 m 的值為？

- (1) 3
- (2) 4
- (3) 5
- (4) 6
- (5) 7

二、多選題(占 30 分)

說明：第 6 題至第 11 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

6. 請選出正確的選項：

- (1) 不等式 $(x-1)(x-2) > 0$ 與 $\frac{x-1}{x-2} > 0$ 有相同的解
- (2) 不等式 $x^2 + 2x + 2 < 0$ 的解為 $-1-i < x < -1+i$
- (3) 若 a, b 為整數， $\frac{2}{3}$ 可能為方程式 $2x^3 + ax^2 + bx + 3 = 0$ 的一個有理根
- (4) 實係數三次方程式 $ax^3 - 2x^2 + bx + 1 = 0$ 至少有一實根
- (5) 實係數多項式函數 $f(x)$ 的圖形與 x 軸相交一點，表示方程式 $f(x) = 0$ 僅有 1 個實根

7. 下列 6 組資料(每組各有 10 筆)

A: 1, 1, 1, 1, 1, -5, -5, -5, -5, -5

B: -2, -2, -2, -2, -2, 10, 10, 10, 10, 10

C: 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5

D: 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6

E: -4, -4, -4, -5, -5, -5, -5, -6, -6, -6

F: 1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, -1

請選出正確的選項。

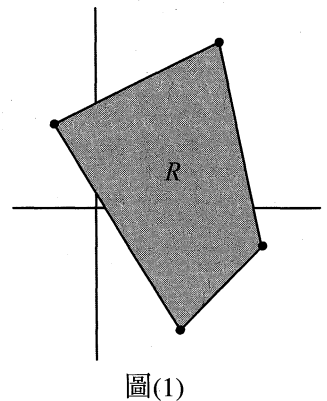
- (1) B 的標準差為 A 的標準差的 -2 倍
- (2) B 的標準差最大
- (3) D 的標準差等於 C 的標準差
- (4) E 的標準差小於零
- (5) F 的標準差最小

8. 坐標平面上一直線 L 的參數式為 $\begin{cases} x=403+4t \\ y=-296-3t \end{cases}$, $t \in R$, 請選出正確的選項。

- (1) 設 L 與 x 軸正向的夾角為 θ , 則 $\sin \theta = \frac{4}{5}$
- (2) 點 $(3, 2)$ 至直線 L 的最短距離為 $\frac{8}{5}$
- (3) 若 $P(x, y)$ 為 L 上一個動點, 則 $x^2 + y^2$ 的最小值為 5
- (4) 設一圓 $C: (x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$, 則圓上離直線 L 最遠的點為 $(\frac{14}{5}, \frac{7}{5})$
- (5) 設一圓 $C: (x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$, 則圓上的點離直線 L 距離為整數的點共有 6 點

9. 如圖(1)所示之四邊形區域(含邊界) R , 其四邊之直線方程式各為 $x-2y+5=0$, $x-y-5=0$, $5x+3y-1=0$, $5x+y-19=0$, 請選出正確的選項。

- (1) 區域 R 可用不等式組 $x-2y+5 \geq 0$, $x-y-5 \leq 0$, $5x+3y-1 \geq 0$, $5x+y-19 \leq 0$ 表示
- (2) 目標函數 $f(x, y) = 2x - y$ 在區域 R 內的最大值為 9
- (3) 設 $P(x, y)$ 為區域 R 內任一點, 則 $(x+1)^2 + (y-3)^2$ 的最小值為 $\frac{4}{5}$
- (4) 設 $P(x, y)$ 為區域 R 內任一點, 則 $\frac{y+1}{x+2}$ 的最大值為 3
- (5) 若直線 $y = mx - 3$ 與區域 R 不相交, 則實數 m 的範圍為 $-5 < m < 0$



圖(1)

10. 老師要求小明用已知的 A 、 B 、 C 三個點求出 $\triangle ABC$ 的三條中線方程式，但小明求出其中兩條中線的方程式為 $x+y=1$ 、 $3x+2y=4$ 後，卻忘了頂點 $A(2,1)$ 以外的兩個點之坐標。若 G 為 $\triangle ABC$ 之重心，請選出正確的選項。
- (1) 重心 G 為 $(2,-1)$
 - (2) 點 $D(2,-2)$ 為 $\angle A$ 對邊的中點
 - (3) $(6,-7)$ 為 $\triangle ABC$ 其中一個頂點
 - (4) \overrightarrow{AB} 與 \overrightarrow{AG} 在 \overrightarrow{AC} 上的正射影向量相同
 - (5) $\triangle ABC$ 的面積為 24
11. 設 $0 < c < 1 < a < b$ ，請選出正確的選項。
- (1) $\log_a c < \log_b c$
 - (2) $\log_c a < \log_c b$
 - (3) $\log_b a < 0$
 - (4) $a^c > b^c$
 - (5) $c^a > c^b$

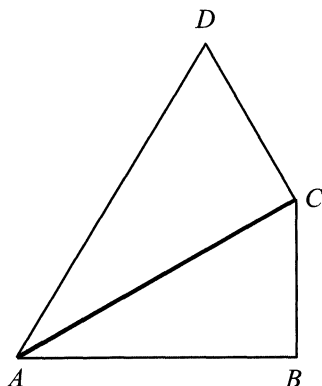
第貳部分：選填題(占 45 分)

說明：1. 第 A 至 I 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號 (12-39)。

2. 每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 設袋中有大小相同的色球數顆，其中白球 2 個，黃球 3 個，紅球 4 個，黑球 5 個，若自袋中任取 3 球分給甲、乙、丙三人，每人一球，則分法有 ⑫⑬ 種。
- B. 10 名學生進住宿舍甲、乙、丙三室，甲室 4 人，乙、丙各 3 人，則某特定二人住同一室之機率為 $\frac{⑭}{⑮⑯}$ 。(請化為最簡分數)
- C. 袋子裡有 6 顆外型、重量完全相同的骰子，其中 2 顆是均勻的，出現各面的機率相等，另外 4 顆是不均勻的，出現各面的機率與其點數成正比。今隨機自袋中取出一顆骰子拋擲，在出現偶數點的條件下，試求所拋擲的是不均勻骰子的機率為 $\frac{⑰⑱}{⑲⑳}$ 。(請化為最簡分數)

- D. 如圖(2)， $\triangle ABC$ 及 $\triangle ACD$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle ACD = 90^\circ$ ， $\angle DAC = \angle CAB = 29^\circ 40'$ ，設 $\overline{AD} = 8$ ，利用所附之三角函數值表，求 $\overline{AB} + \overline{BC}$ 線段長 = ②1. ②②③。(四捨五入至小數第二位)

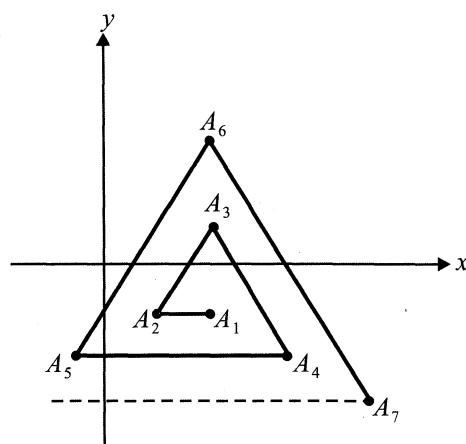


圖(2)

角度	sin	cos	
30°00'	.5000	.8660	60°00'
10'	.5025	.8646	50'
20'	.5050	.8631	40'
30'	.5075	.8616	30'
40'	.5100	.8601	20'
50'	.5125	.8587	10'
31°00'	.5150	.8572	59°00'
10'	.5175	.8557	50'
	cos	sin	角度

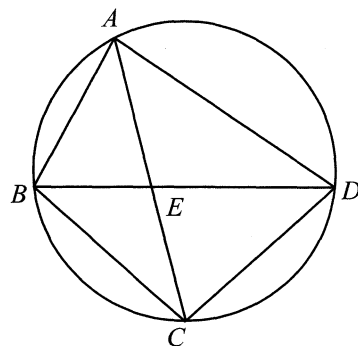
- E. $\triangle ABC$ 中， D 在 \overline{AB} 邊上且 $\overline{AD} : \overline{DB} = 1 : 3$ ， E 在 \overline{AC} 邊上且 $\overline{AE} : \overline{EC} = 2 : 3$ ， \overline{BE} 、 \overline{CD} 交於 F 點，且若有一點 P 滿足 $\overline{PF} = 5$ ，則 $|3\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC}| =$ ②4②5。

- F. 如圖(3)，在坐標平面上有一小黑點，從 $A_1(2, -1)$ 開始依循以下規律移動：第一步向西走1單位到達 $A_2(1, -1)$ ，第二步向北 30° 東走2單位到達 $A_3(2, -1 + \sqrt{3})$ ，第三步向南 30° 東走3單位到達 A_4 ，第四步向西走4單位到達 A_5 ，第五步向北 30° 東走5單位到達 A_6 ，...試問走50步後，小黑點的坐標為(②6，②7②8 + ②9③0 $\sqrt{③1}$)。



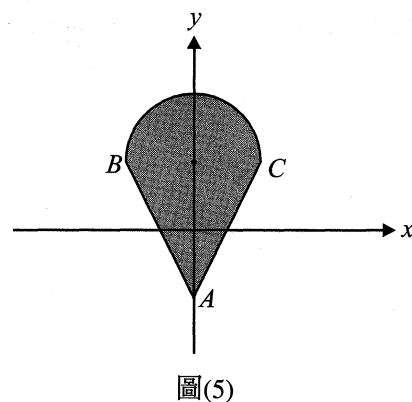
圖(3)

- G. 圖(4)所示，四邊形 $ABCD$ 為圓內接四邊形， E 為對角線 \overline{AC} 、 \overline{BD} 之交點，若 $\overline{BE} = 4$ ， $\overline{DE} = 8$ ，且 $\overline{AB} = \overline{AE}$ ， $\overline{BC} = \overline{CD}$ ，求 $\overline{AD} =$ ③2 $\sqrt{③3}$ 。(化為最簡根式)



圖(4)

- H. 圖(5)所示，線段 \overline{AB} 、 \overline{AC} 及半圓弧 \widehat{BC} 圍成區域 S (包含邊界)，已知 $A(0, -1)$ ， $B(-1, 1)$ ， $C(1, 1)$ ，設點 (x, y) 為區域 S 內的點，若 $3x + 4y$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，求數對 $(M, m) = (\underline{\textcircled{34}}, \underline{\textcircled{35}\textcircled{36}})$ 。



- I. 甲、乙一起練習拉格朗日插值公式解一道多項式的問題：「若 $f(x)$ 為二次多項式，滿足 $f(1) = -8$ ， $f(2) = r$ ， $f(3) = s$ ，試求 $f(5)$ 的值。」計算的過程中，甲誤將 r 的值看成 -5 求得 $f(5) = 52$ ；乙將 $f(5)$ 誤算成 $f(-1)$ 求得其值為 -70 ，若其餘過程皆無誤，則 $f(5)$ 正確的值為 $\textcircled{37}\textcircled{38}\textcircled{39}$ 。

可能用到的參考公式及數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 $r (r \neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$
 $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \quad \sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

4. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

$$\text{標準差 } \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\mu_X^2 \right)}$$

5. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，相關係數 $r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \mu_Y)^2}}$

$$\text{迴歸直線(最適合直線)方程式 } y - \mu_Y = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} (x - \mu_X)$$

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$

7. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$

8. 平面上一點 $P(x_0, y_0)$ 至一直線 $L: ax + by + c = 0$ 的距離為 $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$