

臺北區 102 學年度第一學期
第一次學科能力測驗模擬考試

數學考科

— 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 7 題，選填題第 A 至 G 題共 7 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡的第 18 列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\overset{8}{\square}$ 畫記，如：

18	$\overset{1}{\square}$	$\overset{2}{\square}$	$\overset{3}{\blacksquare}$	$\overset{4}{\square}$	$\overset{5}{\square}$	$\overset{6}{\square}$	$\overset{7}{\square}$	$\overset{8}{\square}$	$\overset{9}{\square}$	$\overset{0}{\square}$	$\overset{-}{\square}$	$\overset{\pm}{\square}$
19	$\overset{1}{\square}$	$\overset{2}{\square}$	$\overset{3}{\square}$	$\overset{4}{\square}$	$\overset{5}{\square}$	$\overset{6}{\square}$	$\overset{7}{\square}$	$\overset{8}{\blacksquare}$	$\overset{9}{\square}$	$\overset{0}{\square}$	$\overset{-}{\square}$	$\overset{\pm}{\square}$

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在

答案卡的第 20 列的 $\overset{-}{\square}$ 與第 21 列的 $\overset{7}{\square}$ 畫記，如：

20	$\overset{1}{\square}$	$\overset{2}{\square}$	$\overset{3}{\square}$	$\overset{4}{\square}$	$\overset{5}{\square}$	$\overset{6}{\square}$	$\overset{7}{\square}$	$\overset{8}{\square}$	$\overset{9}{\square}$	$\overset{0}{\square}$	$\overset{-}{\blacksquare}$	$\overset{\pm}{\square}$
21	$\overset{1}{\square}$	$\overset{2}{\square}$	$\overset{3}{\square}$	$\overset{4}{\square}$	$\overset{5}{\square}$	$\overset{6}{\square}$	$\overset{7}{\blacksquare}$	$\overset{8}{\square}$	$\overset{9}{\square}$	$\overset{0}{\square}$	$\overset{-}{\square}$	$\overset{\pm}{\square}$

※ 試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 考慮下列五組數據：

$$A : 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5$$

$$B : 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6$$

$$C : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

$$D : 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18$$

$$E : -2, -4, -6, -8, -10, -12, -14, -16, -18$$

其標準差分別為 σ_A 、 σ_B 、 σ_C 、 σ_D 、 σ_E ，請選出正確的選項。

(1) σ_A 最大

(2) σ_E 最小

(3) $\sigma_D > \sigma_E$

(4) $\sigma_E = 2\sigma_C$

(5) $\sigma_D = \sigma_C$

2. 數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足： a_n 為 $\log_2 n$ 的整數部分，請選出正確的選項。

(1) 數列 $\langle a_n \rangle$ 的最小值為 1

(2) $a_6 = 3$

(3) 數列 $\langle a_n \rangle$ 中，共有 4 項是 8

(4) 若 $a_n = 6$ ，則 $n = 64$

(5) $\sum_{i=1}^{15} a_i = 34$

3. 下列哪一個函數 $y = f(x)$ 滿足 $\frac{f(a)+f(b)}{2} \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ，其中 a 、 b 為任意相異實數。

(1) $y = f(x) = x^2$

(2) $y = f(x) = 2^x$

(3) $y = f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

(4) $y = f(x) = \log_2 x$

(5) $y = f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

4. 多項式不等式 $x(x-1)(x+1)^6 < 2(x-1)(x+1)^5$ 之解為 $a < x < b$ ，則 $a+b$ 之值為何？

- (1) -3
- (2) 3
- (3) -1
- (4) 1
- (5) 0

5. 設 a 、 b 、 c 為三個相異實數，且滿足
$$\begin{cases} a^3 - 5a^2 - 9a + 45 = 0 \\ b^3 - 5b^2 - 9b + 45 = 0 \\ c^3 - 5c^2 - 9c + 45 = 0 \end{cases}$$
，若將 $(1+kx)^{10}$ 展開並合併同類

項後， x^2 的係數恰為 $a+b+c$ ，則正實數 k 之值為何？

- (1) $\frac{1}{2}$
- (2) $\frac{1}{3}$
- (3) 1
- (4) 2
- (5) 3

6. 正整數中，若滿足數字 n 恰出現 n 次 ($n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$)，則稱此正整數為「自我描述數」。例如：三位數 122 中，1 恰出現 1 次、2 恰出現 2 次，所以 122 是一個三位「自我描述數」，而四位數 3133 是一個四位「自我描述數」。則五位數的「自我描述數」共有多少個？

- (1) 11
- (2) 15
- (3) 16
- (4) 20
- (5) 24

二、多選題 (占 35 分)

說明：第 7 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇 (填) 題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 若 $a、b$ 為實數且 $\log_3 a + 2\log_3 b = 0$ ，則數對 (a, b) 可為下列哪些選項？

- (1) (1,1)
- (2) (2,-3)
- (3) $(9, \frac{1}{3})$
- (4) $(9, -\frac{1}{3})$
- (5) $(\frac{1}{3}, -\sqrt{3})$

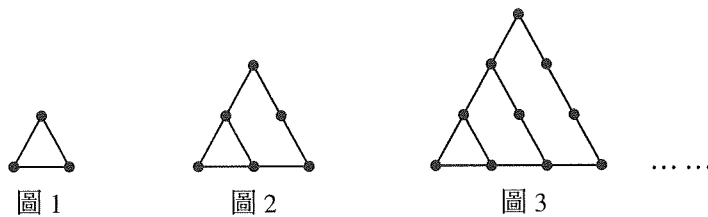
8. 用長度為 1 的木棒依照下列的規則排成正三角形，如下列圖 1 至圖 3：

在圖 1 中，用 3 根木棒排成邊長為 1 的正三角形，

在圖 2 中，用 7 根木棒排成邊長為 2 的正三角形，

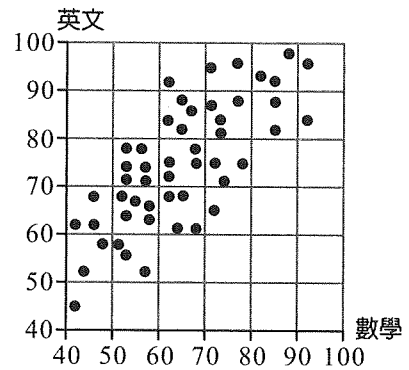
在圖 3 中，用 12 根木棒排成邊長為 3 的正三角形，……，

依此類推。請選出正確的選項。



- (1) 圖 5 使用了 25 根木棒
- (2) 圖 12 與圖 10 相差 27 根木棒數
- (3) 圖 n 使用了 $\frac{n(n+3)}{2}$ 根木棒
- (4) 從圖 1 排到圖 n 共需要 $\sum_{k=1}^n (k^2 + 5k)$ 根木棒
- (5) 從圖 1 排到圖 12 共需要 520 根木棒

9. 設三次實係數多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$ 、 $x-2$ 、 $x-3$ 所得餘式分別為 1、2、5，且令二次多項式 $g(x) = 1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 2 \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + 5 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$ 。請選出正確的選項。
- (1) $g(4) = 10$
 - (2) $f(1) = g(1)$ 、 $f(2) = g(2)$ 、 $f(3) = g(3)$
 - (3) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的餘式為 x
 - (4) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 的餘式為 $g(x)$
 - (5) 沒有實數 x 滿足 $f(x) = g(x)$
10. 擲一公正硬幣 5 次，記錄每次所出現的正反面結果，令 A 表示有連續三次的投擲中恰好出現「正面、正面、反面」的事件， B 表示有連續三次的投擲中恰好出現「正面、反面、反面」的事件，請問下列哪些選項是正確的？
- (1) $P(A) = \frac{3}{16}$
 - (2) A 和 B 為獨立事件
 - (3) A 和 B 為互斥事件
 - (4) $P(A|B) = \frac{1}{3}$
 - (5) $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$
11. 高一甲班 50 人某次考試，數學(橫軸)與英文(縱軸)成績之散布圖，如右圖，每個點代表一位學生的成績。若各科及格標準均為 60 分，請選出正確的選項。



12. 設兩變數 X 與 Y 的 n 筆資料為 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 、 \dots 、 (x_n, y_n) ，且 $Y = -X + 7$ ，若變數 $X' = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x}$ 、 $Y' = \frac{Y - \mu_y}{\sigma_y}$ ，其中 μ_x 、 μ_y 分別為 X 、 Y 的算術平均數， σ_x 、 σ_y 分別為 X 、 Y 的標準差。請選出正確的選項。
- (1) X 與 Y 的相關係數為 1
 - (2) X' 與 Y' 的相關係數大於 X 與 Y 的相關係數
 - (3) Y' 對 X' 的迴歸直線(最適合直線)為 $y' = -x'$
 - (4) Y' 對 X' 的迴歸直線(最適合直線)的斜率與 Y 對 X 的迴歸直線的斜率相等
 - (5) 若 $\mu_x = 0$ ，則 Y' 對 X' 的迴歸直線(最適合直線)與 Y 對 X 的迴歸直線是同一條直線
13. 招呼站現在停了 A 、 B 、 C 三輛計程車，每車限載四人(不含司機)，今同時有七人一起至招呼站搭計程車，已知七人全上車。在不考慮坐在車內位置的情形下，請選出正確的選項。
- (1) 搭乘方法共有 3^7 種
 - (2) 若 A 車載客 3 人， B 車載客 2 人， C 車載客 2 人，則搭乘方法共有 $C_3^7 C_2^3 C_2^2$ 種
 - (3) 若此七人按照 3、2、2 人數搭乘，共有 $\frac{C_3^7 C_2^4 C_2^2}{2!} \times 3!$ 種搭乘方法
 - (4) 若此七人中有一對情侶，此對情侶自行坐一部車，共有 90 種搭乘方法
 - (5) 若限定每車至少要載一人，共有 1890 種搭乘方法

第貳部分：選填題 (占 35 分)

說明：1. 第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(14-30)。
2. 每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 設 $f(x)$ 為三次實係數多項式，其最高次項係數為 -1 ，且 2 和 i 均為方程式 $f(x) = 0$ 的根(其中 $i^2 = -1$)。則 $f(x)$ 的常數項為 ⑭。
- B. 滿足不等式 $(0.2)^{x^2 - 3x + 2} > (0.008)^{x - 1}$ 之所有整數解的總和為 ⑮。

- C. 設 x 為實數，若同時滿足 $|x-1| \leq 3$ 和 $|x-3| \leq 2$ 之 x 的範圍可以寫成 $|ax+1| \leq b$ ，其中 a 、 b 為實數，則 $a+b = \frac{\textcircled{16}}{\textcircled{17}}$ (化為最簡分數)。
- D. 某校實施作業抽查，共計抽查：國文、英文、數學三個科目。抽查方式如下：由各科自行選定一個 0 到 9 的個位數作為抽查數字，但各科選定的抽查數字必須不同。例如：若數學科選定抽查數字為 3，則座號為 3、13、23、33、……，的同學會被抽查數學作業。已知大明與小華同為該校學生，且大明的座號為 24 號，小華的座號為 15 號，則此次作業抽查，兩人均被抽查作業的機率為 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}\textcircled{20}}$ (化為最簡分數)。
- E. 有一新上市的電腦防毒軟體，如果電腦的檔案帶有病毒，此防毒軟體就一定可以偵測出來；但是卻有 5% 的機率，將無病毒的電腦檔案，誤認為有病毒。根據統計，網路所下載的檔案有 0.002 的機率是帶有病毒的。已知此防毒軟體在某下載檔案偵測到病毒，則此檔案確實帶有病毒的機率為 $\frac{\textcircled{21}\textcircled{22}}{\textcircled{23}\textcircled{24}\textcircled{25}}$ (化為最簡分數)。
- F. 投擲一公正骰子四次，依序將出現的點數記錄於四邊形 $ABCD$ 的頂點 A 、 B 、 C 、 D 上，若此四邊形的二條對角線上所記錄的點數和恰相同，則我們稱之為一個「結果」，則滿足此規則全部共有 $\textcircled{26}\textcircled{27}\textcircled{28}$ 個「結果」。(公正骰子即正立方體骰子，各面點數分別為：1、2、3、4、5、6，且各面朝上機會均等)
- G. 已知滿足 n^{31} 為 35 位數的正整數 n 恰有一個，則此正整數 n 為 $\textcircled{29}\textcircled{30}$ 。

可能用到的參考公式及數值

- 一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的公式解：
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
- 平面上兩點 $P_1(x_1, y_1)$ ， $P_2(x_2, y_2)$ 間距離為 $\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- 通過 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 的直線斜率 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ， $x_2 \neq x_1$
- 首項為 a 且公比為 r 的等比數列前 n 項之和 $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ ， $r \neq 1$
- 級數公式：
$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
- 常用對數： $\log 2 \approx 0.3010$ 、 $\log 3 \approx 0.4771$ 、 $\log 7 \approx 0.8451$
- 算術平均數：
$$\mu = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$
- 幾何平均數：
$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$$
- 母體標準差：
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \mu^2}$$
- 相關係數：
$$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i' y_i'}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \mu_y)^2}}$$
，其中 $x_i' = \frac{x_i - \mu_x}{\sigma_x}$ ， $y_i' = \frac{y_i - \mu_y}{\sigma_y}$
- 迴歸直線(最適合直線)：
$$y - \mu_y = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2} (x - \mu_x) = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \mu_x)$$