

臺中區國立高級中學 102 學年度
大學入學第二次學科能力測驗聯合模擬考

數學考科

考試日期：102 年 12 月 23~24 日

— 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 7 題，選填題第 A 至 G 題共 7 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{13}{19}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡的第 18 列的 $\frac{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\frac{8}{\square}$ 畫記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{2021}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在

答案卡的第 20 列的 $\frac{-}{\square}$ 與第 21 列的 $\frac{7}{\square}$ 畫記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

※ 試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題(占 65 分)

一、單選題(占 30 分)

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 若 $2^a = \log_{\frac{1}{2}} a$ ， $2^b = (\frac{1}{2})^b$ ， $(\frac{1}{2})^c = \log_2 c$ ， $(\frac{1}{2})^d = \log_{\frac{1}{2}} d$ ， $\log_2 e = \log_{\frac{1}{2}} e$ ，則下列敘述何者正

確？

- (1) $0 \leq a, b, c, d, e \leq 1$
- (2) $c < d < a < b < e$
- (3) $c < d < a < e < b$
- (4) $b < d < a < e < c$
- (5) $b < a < d < e < c$

2. 平面上有八個點以極坐標表示分別寫成 $A_k[\sqrt{2}, 90^\circ \times k - 70^\circ]$ 與 $B_k[3, 90^\circ \times k - 25^\circ]$ ，其中 $k=1, 2, 3, 4$ ，若依序連接可得一八邊形 $A_1 B_1 A_2 B_2 A_3 B_3 A_4 B_4$ ，其周長為下列何值？

- (1) $\sqrt{5}$
- (2) $4\sqrt{7}$
- (3) $6\sqrt{6}$
- (4) $8\sqrt{5}$
- (5) $8\sqrt{7}$

3. 已知 $A(3, 2, 1)$ 、 $B(4, 3, 5)$ 、 $C(5, 5, 7)$ 為空間坐標中三點，設 $D(x, y, 0)$ 為 xy 平面上一點且滿足 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{18} = 1$ ，試求四面體 $ABCD$ 體積之最大值為何？

- (1) 25
- (2) $\frac{25}{3}$
- (3) $\frac{25}{6}$
- (4) 4
- (5) 2

4. 已知 a 、 b 、 c 為相異之正整數，且滿足 $abc=2310$ ，則集合 $\{a,b,c\}$ 共有幾個？
- (1) 32
 - (2) 36
 - (3) 40
 - (4) 240
 - (5) 243
5. 已知 $-1 \leq x \leq 5$ ， $-3 \leq y \leq 3$ ，若 $xy+3x-y+2$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，則 $M-m=$
- (1) 36
 - (2) 38
 - (3) 42
 - (4) 46
 - (5) 48
6. 設拋物線 $\Gamma: y^2=8x$ 的焦點為 F ，若 A 、 B 為 Γ 上相異兩點且均在 x 軸上方，滿足 $\overline{AF}=5$ ， $\overline{BF}=3$ ，則 ΔABF 之面積為下列何值？
- (1) $2\sqrt{6}+2\sqrt{2}$
 - (2) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$
 - (3) $\sqrt{6}-\sqrt{3}$
 - (4) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$
 - (5) $\sqrt{3}-1$

二、多選題(占 35 分)

說明：第 7 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 台中市政府有 400 位員工及家人參加員工自強活動，小胖統計報名表，辦理保險及分配用餐座位時，將參加人員的年紀 (x_i) 與出生西元年次 (y_i) 編成兩個數列，已知 $x_i + y_i = 2013$ ，則下列有關年紀 (x_i) 與出生西元年次 (y_i) 的統計結果哪些正確？

- (1) 全距相等
- (2) 中位數相等
- (3) 標準差相等
- (4) 算術平均數相等
- (5) 相關係數 = 1

8. 設 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 為實係數三次多項式，則下列敘述哪些正確？

- (1) 若 $f(1-2i) = 0$ ，則 $f(2-i) \neq 0$
- (2) 至少有一實數 x 滿足 $f(x) = x$
- (3) 若 $-\frac{3}{2}$ 為方程式 $f(x) = 0$ 的一根，則 2 是 a 的因數且 3 是 d 的因數
- (4) 若 $f(-1)f(1) > 0$ ，則方程式 $f(x) = 0$ 在 -1 與 1 之間沒有實根
- (5) 若 $f(x) \leq 0$ 的範圍為 $x \leq 1$ ，則方程式 $f(x) = 0$ 有一實根與二虛根

9. 若實數 a 、 b 、 c 、 d 使得聯立方程組 $(L_1): \begin{cases} ax - 9y = b \\ x + 3y = 4 \end{cases}$ 有解，且聯立方程組 $(L_2): \begin{cases} -2x + cy = d \\ x + 3y = 4 \end{cases}$

無解，則下列哪些選項一定正確？

- (1) $a \neq 3$
- (2) $b = -12$
- (3) $c = -6$
- (4) $d = -8$
- (5) 聯立方程組 $\begin{cases} ax - 9y = b \\ -2x + cy = d \end{cases}$ 無解

10. 已知 x 、 y 滿足聯立不等式 $\begin{cases} x+2y \geq 6 \\ x-y \geq 0 \\ 2x-y \leq 7 \end{cases}$ ，且目標函數 $f(x, y) = ax + y$ 在 $(4, 1)$ 處有最小值，則

實數 a 之值可為下列哪些選項？

- (1) -3
 - (2) -1
 - (3) $\frac{1}{2}$
 - (4) 1
 - (5) 2
11. 在 $\triangle ABC$ 中滿足 $\angle A > \angle B > \angle C$ ，則下列選項哪些正確？
- (1) $\sin A > \sin B > \sin C$
 - (2) $\tan A > \tan B > \tan C$
 - (3) $\tan A + \tan B + \tan C > 0$
 - (4) $\cos(A + C) < 0$
 - (5) 若 $\angle A$ 為銳角，則 $\tan B \tan C > 1$

12. 有一個公正的骰子，其各面上的點數分別為 1 、 2 、 3 、 5 、 8 、 13 。今投擲此骰子 100 次，若此 100 次之點數和為偶數的情形有 n 種，則下列各項敘述哪些正確？
- (1) n 是奇數
 - (2) n 是一個 78 位數
 - (3) n 的首位數字是 3
 - (4) n 的末位數字是 1
 - (5) $n > 4^{100}$

13. 討論下列空間中三直線的關係： $L_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y-8}{4} = \frac{z-4}{-1}$ ， $L_2: \frac{x-7}{-1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{2}$ ， $L_3: \frac{x-4}{2} = \frac{y-7}{4} = \frac{z-5}{-1}$ ，下列何者正確？
- (1) L_1 與 L_2 垂直
(2) L_1 、 L_2 為相交兩直線且 $L_1 \parallel L_3$
(3) 若一平面 E_1 包含直線 L_2 與 L_3 ，則 $(3, -1, 2)$ 為平面 E_1 的一個法向量
(4) 直線 $L: \begin{cases} \frac{x-4}{3} = \frac{y-7}{-1} \\ \frac{y-7}{-1} = \frac{z-5}{2} \end{cases}$ 與 L_2 、 L_3 均垂直
(5) L_1 與 L_3 之距離為 $\frac{\sqrt{14}}{7}$

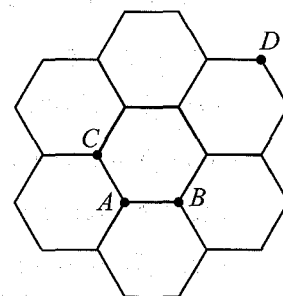
第貳部分：選填題(占 35 分)

說明：1. 第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(14-31)。
2. 每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 設 x 、 y 為實數，若 $\sqrt{(x-2)^2+y^2} + \sqrt{(x-6)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y-4)^2} + \sqrt{x^2+(y-2)^2}$ 有最小值，此時 $x+y = \frac{\textcircled{14}\textcircled{15}}{\textcircled{16}}$ 。(請以最簡分數表示)
- B. 將 5 個不同的球任意放入 A、B、C 三個箱子中，在 A、B 箱中總共放入 3 個球的條件下，則 A 箱中恰放入 1 球的條件機率為 $\frac{\textcircled{17}}{\textcircled{18}}$ 。(請以最簡分數表示)
- C. 若一正數數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1=1$ ，其中 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ，且 $\sqrt{S_{n-1}} + \sqrt{S_n} = a_n$ ($n \geq 2$)，求 $S_{20} = \underline{\textcircled{19}\textcircled{20}\textcircled{21}}$ 。

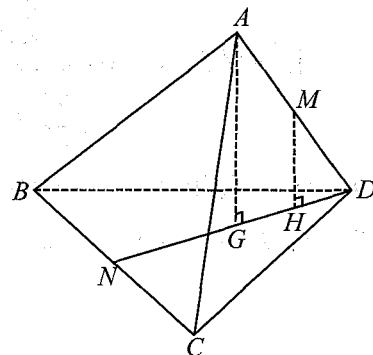
D. 設 $\triangle ABC$ 三邊長分別為 $\overline{AB}=5$ ， $\overline{AC}=7$ ， $\overline{BC}=8$ ，以 \overline{AB} 、 \overline{AC} 為邊向外分別做兩個正三角形 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACE$ ，則 $\triangle ADE$ 面積為 $\frac{\textcircled{22}\textcircled{23}\sqrt{\textcircled{24}}}{\textcircled{25}}$ 。(請以最簡分數表示)

E. 圖(1)為全等之正六角形所形成的蜂巢， A 、 B 、 C 、 D 為其中四個頂點， P 點為 \overline{BC} 與 \overline{AD} 的交點，求 $\frac{\triangle PCD \text{面積}}{\triangle PAB \text{面積}}$ 之值 = $\textcircled{26}$ 。



圖(1)

F. 圖(2)，邊長為 a 的正四面體 $A-BCD$ ，線段 \overline{AD} 、 \overline{BC} 的中點分別為 M 、 N ，直線 \overrightarrow{AG} 與 \overrightarrow{MH} 分別垂直底面 BCD 於 G 和 H 點，若直線 \overrightarrow{CM} 與底面 BCD 的銳夾角為 α ，則 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{\textcircled{27}}}{\textcircled{28}}$ 。
(請以最簡分數表示)



圖(2)

G. 已知 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ ，方程組 $\begin{cases} ax+by=3 \\ cx+dy=4 \end{cases}$ 恰有一解 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$ ，又方程組 $\begin{cases} ex+fy=2 \\ gx+hy=-4 \end{cases}$ 亦恰有一組解 $\begin{cases} x=m \\ y=n \end{cases}$ ，則數對 $(m, n) = (\textcircled{29}, \textcircled{30}\textcircled{31})$ 。

可能用到的參考公式及數值

1. 平面上兩點 $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$ 間的距離為 $\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
2. 通過 $P_1(x_1, y_1)$ 與 $P_2(x_2, y_2)$ 的直線斜率 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ， $x_2 \neq x_1$
3. 面積公式： ΔABC 面積 $= \frac{1}{2} \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin A$
4. ΔABC 的正弦及餘弦定理：
 - (1) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ， R 為外接圓的半徑(正弦定理)
 - (2) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ (餘弦定理)
5. 三角函數的和角公式：
 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
 $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
6. 標準差： $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2}$
7. 相關係數： $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \mu_y)^2}}$
8. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ； $\sqrt{3} \approx 1.732$ ； $\sqrt{5} \approx 2.236$ ； $\sqrt{6} \approx 2.449$ ； $\pi \approx 3.142$
9. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ； $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ； $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ； $\log_{10} 7 \approx 0.8451$