



全國公立高級中學

102 學年度學科能力測驗第三次聯合模擬考試

考試日期：102 年 11 月 4~5 日

數學考科

— 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 6 題，選填題第 A 至 H 題共 8 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\overset{8}{\square}$ 畫記，如：

| | | | | | | | | | | | | |
|----|------------------------|------------------------|-----------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|-----------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|--------------------------|
| 18 | $\overset{1}{\square}$ | $\overset{2}{\square}$ | $\overset{3}{\blacksquare}$ | $\overset{4}{\square}$ | $\overset{5}{\square}$ | $\overset{6}{\square}$ | $\overset{7}{\square}$ | $\overset{8}{\square}$ | $\overset{9}{\square}$ | $\overset{0}{\square}$ | $\overset{-}{\square}$ | $\overset{\pm}{\square}$ |
| 19 | $\overset{1}{\square}$ | $\overset{2}{\square}$ | $\overset{3}{\square}$ | $\overset{4}{\square}$ | $\overset{5}{\square}$ | $\overset{6}{\square}$ | $\overset{7}{\square}$ | $\overset{8}{\blacksquare}$ | $\overset{9}{\square}$ | $\overset{0}{\square}$ | $\overset{-}{\square}$ | $\overset{\pm}{\square}$ |

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在

答案卡的第 20 列的 $\overset{-}{\square}$ 與第 21 列的 $\overset{7}{\square}$ 畫記，如：

| | | | | | | | | | | | | |
|----|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|-----------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|-----------------------------|--------------------------|
| 20 | $\overset{1}{\square}$ | $\overset{2}{\square}$ | $\overset{3}{\square}$ | $\overset{4}{\square}$ | $\overset{5}{\square}$ | $\overset{6}{\square}$ | $\overset{7}{\square}$ | $\overset{8}{\square}$ | $\overset{9}{\square}$ | $\overset{0}{\square}$ | $\overset{-}{\blacksquare}$ | $\overset{\pm}{\square}$ |
| 21 | $\overset{1}{\square}$ | $\overset{2}{\square}$ | $\overset{3}{\square}$ | $\overset{4}{\square}$ | $\overset{5}{\square}$ | $\overset{6}{\square}$ | $\overset{7}{\blacksquare}$ | $\overset{8}{\square}$ | $\overset{9}{\square}$ | $\overset{0}{\square}$ | $\overset{-}{\square}$ | $\overset{\pm}{\square}$ |

※ 試題後附有參考公式及可能用到的數值



第壹部分：選擇題（占60分）

一、單選題（占30分）

說明：第1題至第6題，每題有5個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得5分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 已知 m 是 $\sqrt{2}$ 的小數部分，則 $\sqrt{m^2 - \frac{1}{m^2} + 9}$ 之值最接近下列哪一個整數？

- (1) 0
- (2) 1
- (3) 2
- (4) 3
- (5) 4

2. 若 $x < 0$ ，則下列何者必為正數？

- (1) $\frac{x}{|x|}$
- (2) x^3
- (3) $-\left(\frac{1}{2}\right)^x$
- (4) $-x^{-1}$
- (5) $\log(-x)$

3. 下列哪個數值最大？

- (1) $\sin 25^\circ \cos 35^\circ + \cos 25^\circ \sin 35^\circ$
- (2) $\sin 25^\circ \cos 65^\circ + \cos 25^\circ \sin 65^\circ$
- (3) $\sin 25^\circ \cos 95^\circ + \cos 25^\circ \sin 95^\circ$
- (4) $\sin 25^\circ \cos 125^\circ + \cos 25^\circ \sin 125^\circ$
- (5) $\sin 25^\circ \cos 155^\circ + \cos 25^\circ \sin 155^\circ$

4. 某團體共有 11 名成員，今欲從中選取部分成員(至少 1 人，亦可全選)拍攝廣告。令 A 、 B 分別為選取人數為奇數、偶數的事件， $n(A)$ 、 $n(B)$ 分別表示事件 A 、 B 的選取方法數。則下列選項何者正確？

- (1) $n(A)=n(B)$
 (2) $n(A)=n(B)-1$
 (3) $n(A)+n(B)=2^{11}$
 (4) $n(A)=2^{10}$
 (5) $n(B)=2^{10}$

5. 下列各選項中分別有二維數據 X 、 Y ，請選出相關係數最小的選項？

(1)

| | | | | |
|-----|---|---|---|----|
| X | 0 | 1 | 3 | 4 |
| Y | 1 | 3 | 8 | 16 |

(2)

| | | | | |
|-----|---|---|---|----|
| X | 2 | 4 | 8 | 16 |
| Y | 1 | 2 | 3 | 4 |

(3)

| | | | | |
|-----|---|---|---|----|
| X | 0 | 1 | 3 | 4 |
| Y | 0 | 1 | 9 | 16 |

(4)

| | | | | |
|-----|----------------|-----------------|------------------|------------------|
| X | $\cos 0^\circ$ | $\cos 90^\circ$ | $\cos 180^\circ$ | $\cos 270^\circ$ |
| Y | $\sin 0^\circ$ | $\sin 90^\circ$ | $\sin 180^\circ$ | $\sin 270^\circ$ |

(5)

| | | | | |
|-----|-----------------|------------------|------------------|------------------|
| X | $\cos 0^\circ$ | $\cos 90^\circ$ | $\cos 180^\circ$ | $\cos 270^\circ$ |
| Y | $\sin 90^\circ$ | $\sin 180^\circ$ | $\sin 270^\circ$ | $\sin 360^\circ$ |

6. 若 a, b, c, d 均為集合 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的元素，且此四數的算術平均數為 μ 。今將 a, b, c, d 分別平方後得到的四個數的算術平均數恰好為 μ^2 ，則符合上述條件的數據 (a, b, c, d) 共有多少組解？

- (1) 0
 (2) 5
 (3) P_4^5
 (4) 5^4
 (5) 4^5

二、多選題（占30分）

說明：第7題至第12題，每題有5個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得5分；答錯1個選項者，得3分；答錯2個選項者，得1分；答錯多於2個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 已知在一容器中有 A, B 兩種菌，其個數分別以 n_A 與 n_B 表示，且在任何時刻 A, B 兩種菌的數目一直保持 $n_A \times (n_B)^2 = 10^{12}$ 的狀態。為了簡單起見，科學家用 $P_A = \log(n_A)$ 來記錄 A 菌個數的資料。請選出正確的選項。
- (1) $1 \leq P_A \leq 12$
 - (2) 當 $P_A = 6$ 時， A 菌的個數是 B 菌的兩倍
 - (3) 兩種菌的數目不會相等
 - (4) 若今天的 P_A 值比昨天增加 1，則今天的 A 菌數為昨天的 10 倍
 - (5) 假設科學家將 B 菌的個數控制為 20000 個，則此時 $3 < P_A < 3.5$
8. 將某班級學生的段考國文成績 (X)、數學成績 (Y) 作成統計資料 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 、... (x_n, y_n) ，其中各科成績均以 100 分為滿分、最低 0 分。計算後可得到相關係數 $r_{XY} = 0.8$ ，且由最小平方方法得到的最適直線 (迴歸直線) 為 $L: y = 0.4x + 10$ ，若令 $z_k = 0.4x_k + 60$ (統稱為數據 Z)，對於 $1 \leq k \leq n$ 均成立。請選出正確的選項。
- (1) X 的標準差大於 Y 的標準差
 - (2) X 的平均數小於 Y 的平均數
 - (3) Z 和 Y 的相關係數為 0.32
 - (4) Y 對 Z 以最小平方方法所得到的最適直線斜率為 1
 - (5) 承(4)，該直線在 YZ 平面上的 y 軸截距為 10
9. 令 \vec{a}, \vec{b} 為坐標平面上兩向量。已知 \vec{a} 的長度為 2， \vec{b} 的長度為 $\sqrt{3}$ 且 \vec{a} 與 \vec{b} 之間的夾角為 30° 。令 $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b}$ ， $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$ ，若 x, y 為實數且符合 $4 \leq x + y \leq 6$ 以及 $0 \leq x - y \leq 2$ 。請選出正確的選項。
- (1) 內積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 之值為 3
 - (2) 內積 $\vec{u} \cdot \vec{v}$ 之值為 $9x + 5y$
 - (3) 所有滿足條件的數對 (x, y) 在坐標平面上所構成的圖形之面積為 2
 - (4) 內積 $\vec{u} \cdot \vec{v}$ 有最大值為 46
 - (5) 內積 $\vec{u} \cdot \vec{v}$ 有最小值為 40

10. 設二次實係數多項式 $f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + (-2) \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + 3 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$ 。請選出正確的選項。
- (1) $f(4) = 16$
 - (2) $x-1$ 是 $f(x)$ 的因式
 - (3) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的餘式為 $-3x+4$
 - (4) 方程式 $f(x) = 0$ 在區間 $(2, 3)$ 有實根
 - (5) 滿足不等式 $f(x) < 0$ 的正整數有 1 個
11. 下列各選項中分別有其給定的實數數列，令 S_n 表示該數列的前 n 項總和。請選出正確的選項。
- (1) 若 $\langle a_k \rangle$ 為等差數列，則 S_4 、 $S_8 - S_4$ 、 $S_{12} - S_8$ 必形成等差數列
 - (2) 若 $\langle b_k \rangle$ 為等差數列，且 $S_4 = 10$ 、 $S_8 - S_4 = 34$ 、 $S_{12} - S_8 = 58$ ，則數列 $\langle b_k \rangle$ 的公差為 6
 - (3) 若 $\langle c_k \rangle$ 為等比數列，則 S_4 、 $S_8 - S_4$ 、 $S_{12} - S_8$ 必形成等比數列
 - (4) 若 $\langle d_k \rangle$ 為等比數列，且 $S_4 = 5$ 、 $S_8 - S_4 = 20$ 、 $S_{12} - S_8 = 80$ ，則數列 $\langle d_k \rangle$ 的公比為 $\pm\sqrt{2}$
 - (5) 若 $\langle e_k \rangle$ 為等比數列，且存在某些正整數 m 使得 $S_m = 0$ ，則對於所有自然數 n ， $e_{n+1} + e_n = 0$ 均成立
12. 已知西瓜的成分可區別為水分及非水分，將某農場剛採收的西瓜檢驗後發現，其中水分占重量的 99%，非水分占 1%。由以往的監測得知，西瓜採收後，每經過一天，其水分的重量會因蒸發而減少為前一天的 99%，非水分的重量則維持不變。若此農場採收 10000 公斤的西瓜，令 a_n 表示採收後經過 n 天的西瓜總重量 (n 為正整數)。請選出正確的選項。
- (1) $a_1 = 9901$ (小數點後四捨五入)
 - (2) $a_2 = 9803$ (小數點後四捨五入)
 - (3) $a_{n+1} = \frac{99}{100} \times a_n + 1$
 - (4) $a_n = \left(\frac{99}{100}\right)^n \times 9900 + 100$
 - (5) 若經過一段時間 t (t 為正數) 後再做一次檢驗，發現這批西瓜的水分僅占此時西瓜總重量的 98%，則此時西瓜的總重量為 5000 公斤

第貳部分：選填題（占40分）

說明：1.第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號(13-33)。
2.每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 坐標平面上，已知 $\triangle ABC$ 的三邊 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CA} 之中點分別為 $P(11,6)$ 、 $Q(20,-11)$ 、 $R(2,-19)$ ，則 $\triangle ABC$ 之重心 G 的坐標為 ($\textcircled{13}$ $\textcircled{14}$, $\textcircled{15}$ $\textcircled{16}$)。

B. 已知方程式 $7^{x+7}=9^x$ 的解可以表示成 $x=\log_b 7^7$ ，試問 $b = \frac{\textcircled{17}}{\textcircled{18}}$ 。(請化為最簡分數)

C. 某鑽石商舉辦晚會，共有 100 人參加，其中甲、乙二人為夫妻。活動規劃一放置飲料的區域為驚喜區，驚喜區的 100 杯飲料中，共有 10 杯放有同樣大小的鑽石。若規定每人都要從驚喜區拿 1 杯飲料，則在已知甲得到鑽石的前提下，乙也得到鑽石的機率為 $\frac{\textcircled{19}}{\textcircled{20}\textcircled{21}}$ 。(請化為最簡分數)

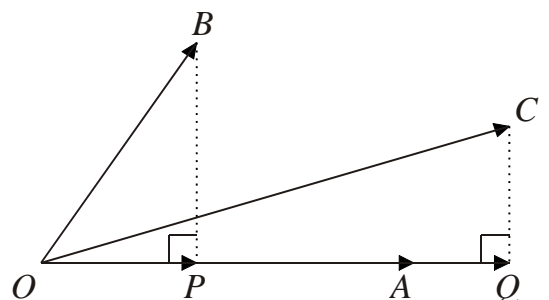
D. 坐標平面上，已知 $\triangle ABC$ 的外心為 $O(-3,5)$ ， \overline{AB} 的中點為 $P(-7,8)$ ， \overline{AC} 的中點為 $Q(0,4)$ ，則頂點 A 之坐標為 ($\textcircled{22}$, $\textcircled{23}$ $\textcircled{24}$)。

E. 已知圓 Γ 之方程式為 $x^2 + y^2 = 15$ ，原點 $O(0, 0)$ ，點 $A(8, 0)$ 。設 $B(a, b)$ 為 Γ 上之動點，則 $\cos(\angle OAB)$ 之最小值為 $\frac{\textcircled{25}}{\textcircled{26}}$ 。(請化為最簡分數)

F. $\triangle ABC$ 中， a 、 b 、 c 分別為 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 之對邊長。若 $\triangle ABC$ 之面積為 $\frac{1}{14}(b^2 + c^2 - a^2)$ ，則 $\tan A$ 之值為 $\frac{\textcircled{27}}{\textcircled{28}}$ 。(請化為最簡分數)

G. 設實係數三次多項式 $f(x)$ 最高次項的係數為 1，且 $f(x)=0$ 的三根為 $k+i$ 、 $k+3i$ 與 $2k-4$ ，其中 k 為複數， $i=\sqrt{-1}$ ，則 $f(x)$ 之常數項為 $\textcircled{29}\textcircled{30}\textcircled{31}$ 。

H. 如下圖， O 、 P 、 A 、 Q 四點共線，若 \vec{OB} 在 \vec{OA} 上的正射影為 \vec{OP} ， \vec{OC} 在 \vec{OA} 上的正射影為 \vec{OQ} ，且 $\vec{OQ}=3\vec{OP}$ ，已知內積 $\vec{OA} \cdot \vec{OB}=15$ ，則內積 $\vec{OA} \cdot \vec{OC}$ 之值為 $\textcircled{32}\textcircled{33}$ 。



參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 $r (r \neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

4. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

$$\text{標準差 } \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} ((\sum_{i=1}^n x_i^2) - n\mu_X^2)}$$

5. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，相關係數 $r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

迴歸直線(最適合直線)方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236, \sqrt{6} \approx 2.449, \pi \approx 3.142$

7. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010, \log_{10} 3 \approx 0.4771, \log_{10} 5 \approx 0.6990, \log_{10} 7 \approx 0.8451$