

第壹部分：選擇題（占55分）

一、單選題（占25分）

說明：第1題至第5題，每題有5個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得5分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 化簡 $\frac{1}{x - \frac{x^2 - 1}{x - \frac{2}{x - 1}}}$ 可得下列何者？

- (1) $x+1$
- (2) $-x+1$
- (3) x
- (4) $-x+2$
- (5) $x-2$

2. 有一長方形 $ABCD$ ，分別以 \overline{AB} 及 \overline{CD} 為直徑向外各作一個半圓(如圖1所示)。若已知 \overline{AD} 長為100公尺，且 $AMBCND$ 周長(外圍的粗線部分)為400公尺，則可計算得 \overline{AB} 的長度大約為下列何者？(以四捨五入法取到整數)

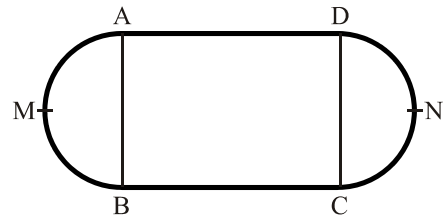


圖 1

- (1) 58公尺
- (2) 60公尺
- (3) 62公尺
- (4) 64公尺
- (5) 66公尺

3. 同時投擲兩個大小不同的骰子一次。令大骰子的點數為 x ，小骰子的點數為 y 。已知 $x^2 < 10$ 的事件為 A ， $x^2 + y^2 < 40$ 的事件為 B ，則條件機率 $P(B|A)$ 之值為下列何者？

- (1) $\frac{5}{18}$
- (2) $\frac{5}{9}$
- (3) $\frac{4}{9}$
- (4) $\frac{8}{9}$
- (5) $\frac{1}{2}$

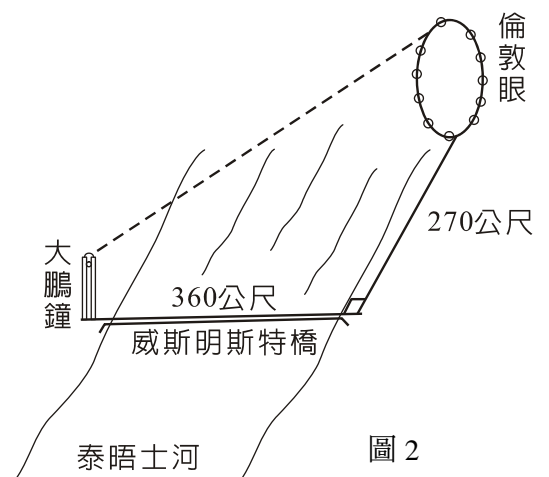
4. 亞洲某城市將 2012 年該城市的家庭可支配所得由最低到最高作五等第分組如下表。例如，最低 20% 的家庭可支配所得的算術平均數為 29 萬元；最高 20% 的家庭可支配所得的算術平均數為 182 萬元。由下表的數據推算，可知 2012 年此城市的全體家庭可支配所得的算術平均數最接近下列何者？(以四捨五入法取到整數)

等 第	最低 20%	第二 20%	第三 20%	第四 20%	最高 20%
家庭可支配所得(萬元)	29	54	78	108	182

- (1) 88 萬元
 (2) 90 萬元
 (3) 92 萬元
 (4) 94 萬元
 (5) 96 萬元
5. 今年夏天佳欣到倫敦旅遊，來到泰晤士河畔，由 96 公尺高的大鵬鐘下向前步行 360 公尺(經過威斯明斯特橋)，再左轉 270 公尺來到倫敦眼(倫敦最著名的摩天輪，遊客搭乘的導覽車廂為膠囊形狀)，如圖 2 所示。購票排隊後搭上其中一個膠囊，當來到 135 公尺高的頂端，俯視遠在泰晤士河另一岸的大鵬鐘頂。若俯角為 θ ，則 θ 最接近哪一個選項？

角度	5°	6°	7°	8°	9°
tan	0.0875	0.1051	0.1228	0.1405	0.1584

- (1) 5°
 (2) 6°
 (3) 7°
 (4) 8°
 (5) 9°



二、多選題 (占 30 分)

說明：第 6 題至第 11 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇 (填) 題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

6. 已知 $f(x) = x^2 - x + 2$ 。若等差數列 $\{a_n\}$ 前三項為 a_1, a_2, a_3 ，其中 $a_1 = 0, a_2 > 0$ 。若數列 $\{b_n\}$ 為等比數列，其前三項定義為 $b_1 = f(a_1), b_2 = f(a_2), b_3 = f(a_3)$ ，請選出正確選項。
- (1) $a_2 = 2$
 - (2) $b_3 = 16$
 - (3) $a_{103} > b_5$
 - (4) 若數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項和大於 100，則 n 之值至少為 9
 - (5) b_{100} 是 60 位正整數

7. 如圖 3，空間坐標系中有一長方體 $OPQRABCD$ ，其中 $O(0,0,0), P(3,0,0), R(0,4,0), A(0,0,5)$ ，請選出正確選項。

- (1) $C(5,3,4)$
- (2) 外積 $\vec{BQ} \times \vec{BD} = (20, 15, 12)$
- (3) 內積 $\vec{BQ} \cdot \vec{BD} = 16$
- (4) 點 C 到平面 BDQ 的距離小於 2
- (5) 平面 BDQ 與平面 OAC 互相垂直

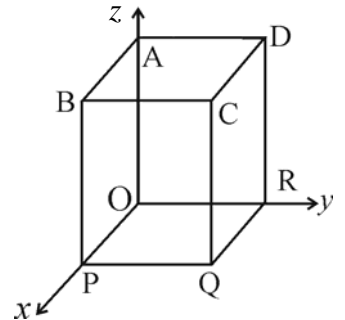


圖 3

8. 下列哪些選項的敘述是正確的？
- (1) $\frac{2}{3} < \frac{5}{7} < \frac{3}{4}$
 - (2) 若 $0 < a < b$ 且 $a + b = 1$ ，則 $2ab < \frac{1}{2} < a^2 + b^2$ 恆成立
 - (3) 已知 a, b 皆為實數，且 $a > b$ ，則 $(0.2)^a < (0.2)^b$ 恆成立
 - (4) 已知 a, b 皆為正實數，且 $a > b$ ，則 $\log_2 \frac{1}{a} > \log_2 \frac{1}{b}$ 恆成立
 - (5) 對於任意實數 x ， $\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2}$ 恆成立

9. 下列哪些選項中的 $f(x)$ 有最小值 $\frac{3}{4}$?
- (1) x 為實數, $f(x) = x^2 + x + 1$
 - (2) x 為實數, $f(x) = x^4 + x^2 + 1$
 - (3) x 為實數, $f(x) = 4^x + 2^x + 1$
 - (4) x 為正實數, $f(x) = (\log_2 x)^2 + (\log_2 x) + 1$
 - (5) $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$, $f(x) = \sin^2 x + \sin x + 1$
10. 散布圖上有 3 筆資料, 分別為 $A(1,13), B(2,11), C(6,3)$ 。若由此 3 筆資料可得 x 與 y 的相關係數為 r , 且 y 對 x 的迴歸直線方程式為 $L: y = a + bx$, 請選出正確選項。
- (1) $r = 0.5$
 - (2) $b = 2$
 - (3) $a = 15$
 - (4) 當加入點 $D(4,5)$, 則由 $A、B、C、D$ 等 4 筆資料可得 x 與 y 的相關係數會小於 r
 - (5) 當加入點 $E(3,9)$, 則由 $A、B、C、E$ 等 4 筆資料可得 y 對 x 的迴歸直線之斜率會大於 b
11. 已知 $\Gamma_1: y = x^2, \Gamma_2: y = (x-1)^3, \Gamma_3: x^2 + y^2 = 1$ 。將 Γ_1 的圖形沿鉛直方向上移 1 單位可得 Γ_4 的圖形; 將 Γ_2 的圖形沿水平方向右移 2 單位可得 Γ_5 的圖形; 將 Γ_3 的圖形沿水平方向伸張 3 倍可得 Γ_6 的圖形。請選出正確選項。
- (1) $\Gamma_4: y = (x-1)^2$
 - (2) $\Gamma_6: 9x^2 + y^2 = 1$
 - (3) Γ_4 與 Γ_5 的圖形沒有交點
 - (4) Γ_4 與 Γ_6 的圖形恰有一個交點
 - (5) Γ_5 與 Γ_6 的圖形恰有兩個交點

第貳部分：選填題（占 45 分）

說明：1. 第 A 至 I 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號(12-33)。
2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 若 $x = 2 + 3\sqrt{5}$, 則 $\frac{x^3 - 3x^2 - 39x - 53}{x^2 - 4x - 40}$ 之值為 ⑫ ⑬ $\sqrt{5}$ 。

B. 已知 a, b 均為正整數，且 $\log(a-3)$ 與 $\log(4-b)$ 的算術平均數為 $\log\sqrt{5}$ ，則序對 $(a, b) = (\underline{14}, \underline{15})$ 。

C. 一袋中有 2 個相異紅球、3 個相異白球、4 個相異黃球。自袋中一次取出 3 球，則恰有兩球顏色相同的取球情形有 16 17 種。

D. 如圖 4，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $\overline{BC} = 1$ 且 $\triangle ABC$ 面積為 $\sqrt{3}$ ，則 $\tan \angle ACB = \underline{18 \ 19 \ \sqrt{20}}$ 。
(化成最簡根式)

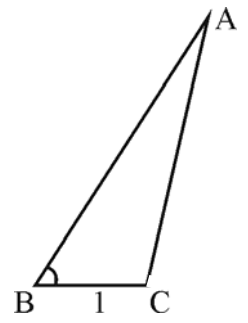


圖 4

E. 如圖 5，在邊長為 3 的正方形四邊上有 12 個相鄰等距的點，由這 12 個點所決定的直線斜率有 21 22 種不同的值。

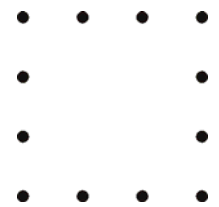


圖 5

F. 已知圓 $C: x^2 + (y-1)^2 = 4$ 與直線 $L: 2x + y = k$ 。若圓 C 與直線 L 有兩個交點，且其中一個交點位在第一象限，另一個交點位在第四象限，此時滿足上述條件的 k 值之範圍為 $\alpha < k < \beta$ ，則 $\alpha^2 + \beta^2$ 之值為 ⑳㉑。

G. 已知 x, y 為實數，二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ 3 & y \end{bmatrix}$ 。若 A 的乘法反方陣 A^{-1} 存在且 $A = A^{-1}$ ，則數對 $(x, y) = (\text{㉒}\text{㉓}, \text{㉔}\text{㉕})$ 。

H. 在直角坐標平面上，已知 $\triangle OAB$ 面積為 12。假設 $L = \{P \mid \overrightarrow{OP} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB}, \text{其中 } -1 \leq \alpha \leq 3, -1 \leq \beta \leq 2\}$ ，
 $M = \{P \mid \overrightarrow{OP} = m \overrightarrow{OA} + n \overrightarrow{OB}, \text{其中 } -2 \leq m \leq 2, -2 \leq n \leq 1\}$ ，
 則重疊區域 $L \cap M$ 的面積為 ㉖㉗㉘。

I. 在直角坐標平面上， O 為原點，拋物線 $\Gamma: y^2 + 4x - 6y + 25 = 0$ 的焦點為 F ，則 F 與 O 的距離為 $\sqrt{\text{㉙}\text{㉚}}$ 。

參考公式及可能用到的數值

1. 圓周率 $\pi \approx \frac{22}{7}$

2. 條件機率 $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

3. 算幾不等式：若 a, b 為非負實數，則 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

4. 柯西不等式：若 a, b, c, d 皆為實數，則 $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$

5. 相關係數 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x) \cdot (y_i - \mu_y)}{n \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x) \cdot (y_i - \mu_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \mu_y)^2}}$

其中 $\mu_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ， $\mu_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$

6. 迴歸直線方程式 $y = a + bx$

其中 $b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2}$ ，且 $a = \mu_y - b\mu_x$