

臺北區 102 學年度第一學期 第二次學科能力測驗模擬考試

數學考科

— 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 7 題，選填題第 A 至 G 題共 7 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{18}{19}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡的第 18 列的 $\frac{3}{19}$ 與第 19 列的 $\frac{8}{19}$ 畫記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{20 \text{ 21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在

答案卡的第 20 列的 $\frac{-}{50}$ 與第 21 列的 $\frac{7}{50}$ 畫記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±

※ 試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 連續投擲一公正骰子 10 次，若丟出 n 次正面的機率為 p_n ，當 p_n 有最大值時， n 值為下列何者？
 - (1) 1
 - (2) 3
 - (3) 5
 - (4) 7
 - (5) 9

2. $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB}=1+\sqrt{2}$ ， $\overline{BC}=1+\sqrt{3}$ ， $\overline{CA}=\sqrt{5}$ ，若 $p=\cos A$ ， $q=\cos B$ ， $r=\cos C$ ，則 p, q, r 的大小順序為：
 - (1) $p > q > r$
 - (2) $p > r > q$
 - (3) $q > p > r$
 - (4) $q > r > p$
 - (5) $r > p > q$

3. 坐標平面上，與二圓 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 、 $(x-7)^2 + y^2 = 1$ 都外切，且與 x 軸、 y 軸也都相切的圓有幾個？
 - (1) 1
 - (2) 2
 - (3) 3
 - (4) 4
 - (5) 0

4. 設 \vec{a} 、 \vec{b} 為不平行的二平面向量，則下列哪一個平面向量和 \vec{a} 的夾角必定等於這個平面向量和 \vec{b} 的夾角？

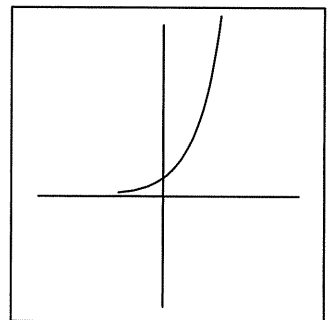
- (1) $\vec{a} + \vec{b}$
 (2) $-\vec{a} - \vec{b}$
 (3) $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$
 (4) $\frac{\vec{a}}{|\vec{b}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{a}|}$
 (5) $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

5. 以下各選項資料關於 y 對 x 的迴歸直線(最適合直線)中，斜率最大的是哪一個選項？

- (1) $\frac{x}{y} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$
 (2) $\frac{x}{y} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 4 \\ \hline \end{array}$
 (3) $\frac{x}{y} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 5 \\ \hline \end{array}$
 (4) $\frac{x}{y} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 3 & 3 \\ \hline \end{array}$
 (5) $\frac{x}{y} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline \end{array}$

6. 小寶在教室地上撿到鄰座同學小瓜在一張 A4 紙上所畫的曲線軌跡圖，該圖沒有標出兩條互相垂直的直線何者為 x 軸與 y 軸，也沒有畫出兩軸正向的箭頭符號，如圖(1)。試問該曲線圖，不可能是下列哪一個選項的部分圖形？

- (1) $y = 2^x$
 (2) $y = -2^{-x}$
 (3) $y = \log_2(-x)$
 (4) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$
 (5) $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$



圖(1)

二、多選題 (占 35 分)

說明：第 7 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇 (填) 題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 設實係數二次多項式 $f(x)=51(x-2014)(x-2015)-103(x-2013)(x-2015)+g(x)$ ，且 $f(2013)=102$ ， $f(2014)=103$ ， $f(2015)=104$ 。則下列選項哪些正確？
- (1) $g(x)$ 是二次多項式
 - (2) $g(2013)=0$
 - (3) $g(2015)=0$
 - (4) 多項式 $g(x)$ 的領導係數是 104
 - (5) 多項式 $g(x)$ 的常數項是 104 的倍數
8. 已知 $a_1 < a_2 < a_3$ ， $b_1 < b_2 < b_3$ ，若 a_1 、 a_2 、 a_3 三數的平均數為 μ ，標準差為 σ ； b_1 、 b_2 、 b_3 三數的平均數也是 μ ，標準差也是 σ ，請選出正確的選項：
- (1) a_1 、 a_2 、 a_3 、 b_1 、 b_2 、 b_3 六數的平均數為 μ
 - (2) a_1 、 a_2 、 a_3 、 b_1 、 b_2 、 b_3 六數的標準差為 σ
 - (3) a_1 、 b_2 、 a_3 的平均數為 μ
 - (4) a_1 、 b_2 、 a_3 的標準差為 σ
 - (5) 若二維數據資料為 (a_1, b_1) 、 (a_2, b_2) 、 (a_3, b_3) ，則兩組數據的相關係數為 1
9. 已知函數 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 的圖形分別為直線 L_1 與 L_2 ，其中 L_1 過點 $(0,1)$ ， L_2 過點 $(0,2)$ ，且函數值 $f(1)>1$ ， $f(2)>2$ 。設 $h(x)=f(x)g(x)$ ，則關於函數 $y=h(x)$ 的圖形描述，下列哪些選項正確？
- (1) $y=h(x)$ 的圖形可能是二直線
 - (2) $y=h(x)$ 的圖形可能是一拋物線
 - (3) $y=h(x)$ 的圖形可能與 x 軸無交點
 - (4) $y=h(x)$ 的圖形可能與 x 軸恰有一交點
 - (5) $y=h(x)$ 的圖形可能與 x 軸有兩交點

10. 將 $\triangle ABC$ 置於直角坐標平面上， P 與原點 O 為該平面上相異兩點，且 $6\vec{OP} = 3\vec{OA} + 2\vec{OB} + \vec{OC}$ ，若直線 AP 與直線 BC 相交於 D ，則下列哪些選項正確？

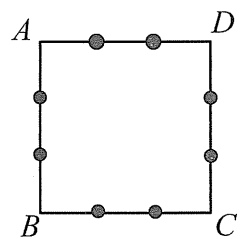
- (1) O 在 $\triangle ABC$ 的內部
- (2) P 在 $\triangle ABC$ 的內部
- (3) $\overline{BD} : \overline{CD} = 1 : 3$
- (4) $\overline{AP} : \overline{AD} = 1 : 2$
- (5) 若 $\vec{OQ} = 6\vec{OP}$ ，則 Q 在 $\triangle ABC$ 的外部

11. 坐標平面上三點為 $A(-1,1)$ 、 $B(4,3)$ 、 $C(-1,5)$ ，若點 $P(a,b)$ 為 $\triangle ABC$ 邊界或內部的一點，則下列哪些選項正確？

- (1) $a+b \geq 0$
- (2) $3a+b \leq 2$
- (3) $a-b \leq 3$
- (4) $\cos \angle APB$ 的最大值為 $\frac{2}{\sqrt{29}}$
- (5) 滿足 $a^2+b^2=25$ 條件的 P 點，恰有一個

12. 如圖(2)，正方形 $ABCD$ 的四邊上都各有二個三等分點，從這四邊中任選三邊，再從選出來的三邊上各選一個點，作為三角形的三個頂點，則下列敘述哪些正確？

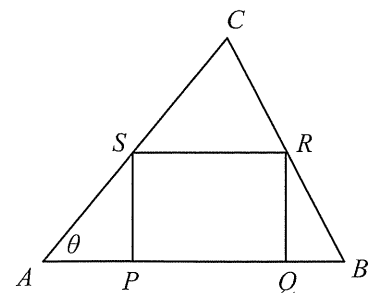
- (1) 共可做出 24 個三角形
- (2) 共可做出 8 個直角三角形
- (3) 共可做出 8 個銳角三角形
- (4) 共可做出 8 個鈍角三角形
- (5) 共可做出 16 個等腰三角形



圖(2)

13. 如圖(3)， $PQRS$ 為一矩形， P 、 Q 在 \overline{AB} 邊上， R 、 S 分別在 \overline{BC} 、 \overline{AC} 邊上，且 $\overline{PQ}=4$ 、 $\overline{QR}=3$ 、 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 。則下列選項哪些正確？

- (1) $\overline{AS} = 3\sin \theta$
- (2) $\overline{SC} > 4$
- (3) $\overline{QB} = 3\tan \frac{\theta}{2}$
- (4) $\triangle ABC$ 面積的最大值為 25
- (5) $\triangle ABC$ 面積的最小值為 24



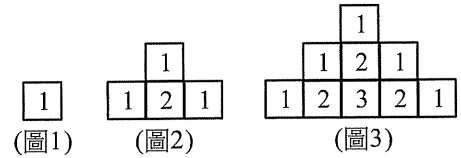
圖(3)

第貳部分：選填題（占 35 分）

說明：1. 第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號(14-30)。

2. 每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 觀察右側圖形的規律： a_n 表示圖 n 中所有數字的總和，即 $a_1=1$ ， $a_2=5$ ， $a_3=14$ ， \dots ，則 $a_{10} = \underline{\textcircled{14}\textcircled{15}\textcircled{16}}$ 。

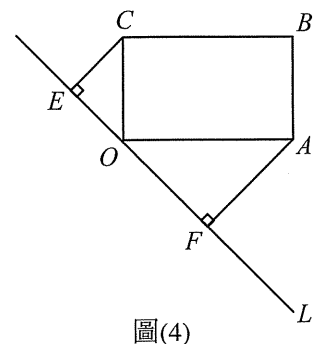


- B. 已知一盒中有 10 個球，球上分別印有號碼 1 到 10，由盒中依次取出 4 球，則在取出 4 球之號碼中第二大數為 7 的條件下，第一次取出的球號碼是 9 的條件機率為 $\frac{\textcircled{17}}{\textcircled{18}\textcircled{19}}$ 。(化為最簡分數)

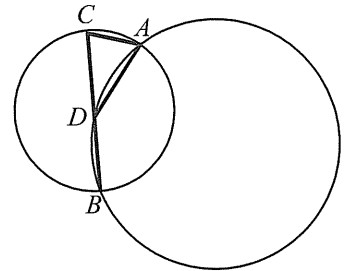
- C. 坐標平面上，直線 L 的法向量為 $(2, -1)$ ， A 點在直線上且 B 點在直線外， $\overrightarrow{AB} = (-3, 4)$ ，則 B 點到直線 L 的距離為 $\underline{\textcircled{20}\sqrt{\textcircled{21}}}$ 。

- D. 海面上，敵軍一艘快艇從 A 點向東航行，當它行走 1 公里到達 C 點處時，我軍在 C 點東偏南 60° ，距離 C 點 6 公里的 B 基地，同時立刻發射一枚飛彈，經過一段時間，在 P 點處將它擊毀。假設快艇與飛彈都是等速直線前進，而飛彈的速度是快艇的兩倍，則該快艇所航行的 \overline{AP} 距離為 $\underline{\sqrt{\textcircled{22}\textcircled{23}}}$ 公里。

- E. 如圖(4)， $OABC$ 為一矩形， $\overline{AF} \perp L$ ， $\overline{CE} \perp L$ 。若 $\overline{OF} = 4$ ， $\overline{OE} = 3$ ，求 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{FE} = \underline{\textcircled{24}\textcircled{25}}$ 。

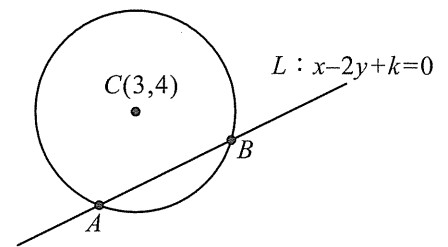


- F. 如圖(5)，大小兩圓相交於 A 、 B 兩點，今在左邊小圓上取一點 C ，作弦 \overline{BC} 交大圓於 D 點，若 $\overline{AD} = \overline{CD} = 3$ 且 $\overline{AC} = 2$ ，大圓與小圓的半徑分別為 R 與 r ，則 $\frac{R}{r} = \frac{\textcircled{26}}{\textcircled{27}}$ 。(化為最簡分數)



圖(5)

- G. 坐標平面上，直線 $L: x-2y+k=0$ 與圓 C 相交於 A 、 B 兩點，且 $\overline{AB}=2$ ，如圖(6)。若圓心 $C(3,4)$ 在直線 L 的上方，且到 L 的距離等於 1，則通過 A 、 C 兩點的直線方程式為 $y=ax+b$ ，求 $(a, b) = \underline{\textcircled{28}, \textcircled{29}\textcircled{30}}$ 。



圖(6)



可能用到的參考公式及數值

- 一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的公式解：
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
- 平面上兩點 $P_1(x_1, y_1)$ ， $P_2(x_2, y_2)$ 間距離為 $\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- 通過 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 的直線斜率 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ， $x_2 \neq x_1$
- 首項為 a 且公比為 r 的等比數列前 n 項之和 $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$ ， $r \neq 1$
- 級數公式：
$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
- 常用對數： $\log 2 \approx 0.3010$ 、 $\log 3 \approx 0.4771$ 、 $\log 7 \approx 0.8451$
- 算術平均數：
$$\mu = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$
- 幾何平均數：
$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$$
- 母體標準差：
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \mu^2}$$
- 相關係數：
$$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i' y_i'}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \mu_y)^2}}$$
，其中 $x_i' = \frac{x_i - \mu_x}{\sigma_x}$ ， $y_i' = \frac{y_i - \mu_y}{\sigma_y}$
- 迴歸直線(最適合直線)：
$$y - \mu_y = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2} (x - \mu_x) = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \mu_x)$$
- $\sqrt{2} \doteq 1.414$ ， $\sqrt{3} \doteq 1.732$ ， $\sqrt{5} \doteq 2.236$

