

臺中區國立高級中學 103 學年度
大學入學第一次學科能力測驗聯合模擬考

數學考科

考試日期：103 年 11 月 3~4 日

— 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 6 題，選填題第 A 至 H 題共 8 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡的第 18 列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\overset{8}{\square}$ 畫記，如：

18	$\overset{1}{\square}$	$\overset{2}{\square}$	$\overset{3}{\blacksquare}$	$\overset{4}{\square}$	$\overset{5}{\square}$	$\overset{6}{\square}$	$\overset{7}{\square}$	$\overset{8}{\square}$	$\overset{9}{\square}$	$\overset{0}{\square}$	$\overset{-}{\square}$	$\overset{\pm}{\square}$
19	$\overset{1}{\square}$	$\overset{2}{\square}$	$\overset{3}{\square}$	$\overset{4}{\square}$	$\overset{5}{\square}$	$\overset{6}{\square}$	$\overset{7}{\square}$	$\overset{8}{\blacksquare}$	$\overset{9}{\square}$	$\overset{0}{\square}$	$\overset{-}{\square}$	$\overset{\pm}{\square}$

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在

答案卡的第 20 列的 $\overset{-}{\square}$ 與第 21 列的 $\overset{7}{\square}$ 畫記，如：

20	$\overset{1}{\square}$	$\overset{2}{\square}$	$\overset{3}{\square}$	$\overset{4}{\square}$	$\overset{5}{\square}$	$\overset{6}{\square}$	$\overset{7}{\square}$	$\overset{8}{\square}$	$\overset{9}{\square}$	$\overset{0}{\square}$	$\overset{-}{\blacksquare}$	$\overset{\pm}{\square}$
21	$\overset{1}{\square}$	$\overset{2}{\square}$	$\overset{3}{\square}$	$\overset{4}{\square}$	$\overset{5}{\square}$	$\overset{6}{\square}$	$\overset{7}{\blacksquare}$	$\overset{8}{\square}$	$\overset{9}{\square}$	$\overset{0}{\square}$	$\overset{-}{\square}$	$\overset{\pm}{\square}$

※ 試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題(占 60 分)

一、單選題(占 30 分)

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 下列哪個方程式恰有一實數解？

(1) $2^{|x|} = x^2$

(2) $2^x = \log_2 x$

(3) $4^x = x^4$

(4) $2^{|x|} = 2x$

(5) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \log_{\frac{1}{2}} x$

2. 某生物實驗室對一個地區進行果蠅繁殖的生態調查，他們對該地區的果蠅密度用一種數列 $\langle d_n \rangle$ 來呈現，其中 d_n 代表第 n 週後調查所得到的密度。生物學家發現該地區果蠅

密度 d_n 符合以下規則：
$$d_n = \begin{cases} d_{n-1} + \frac{1}{2}, & 0 \leq d_{n-1} < \frac{1}{2} \\ 2 - 2d_{n-1}, & \frac{1}{2} \leq d_{n-1} \leq 1 \end{cases}$$
。如果該地區第一週後的果蠅密度

$d_1 = \frac{1}{10}$ ，則 52 週後(一年後)的密度值為：

(1) $\frac{1}{5}$

(2) $\frac{2}{5}$

(3) $\frac{3}{5}$

(4) $\frac{4}{5}$

(5) $\frac{7}{10}$

3. xy 平面上，若二直線 $L: 3x+4y=23$ 和 $M: \begin{cases} x=12t-1 \\ y=at+3 \end{cases}$ (t 為實數) 交角之正弦值為 $\frac{4}{5}$ ，則 $a = ?$
- (1) $-\frac{7}{2}$
(2) -3
(3) 3
(4) $\frac{7}{2}$
(5) $\frac{5}{2}$
4. xy 平面上，設直線 $L: 4x-3y-5=0$ 與圓 $C: x^2+y^2-2tx+6y+10=0$ 相切，則 t 值在下列哪一個區間範圍內？
- (1) $(-4, -3)$
(2) $(-2, -1)$
(3) $(0, 1)$
(4) $(2, 3)$
(5) $(4, 5)$
5. 下列哪一個選項**無法**找到實數 a ，使得選項中所有的數都滿足五次不等式 $(103x-2014)(-x^2+x-1)[x^2+(a-3)x-3a]<0$ ？
- (1) $103, 2014$
(2) $10, 20, 40, 80, 160$
(3) $1, 11, 21, 31, 41$
(4) $0, 20, 40, 60, 80, 100, \dots$
(5) $\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi, \dots$

6. 設 $(1+\sqrt{2})^7 = a+b\sqrt{2}$ ，其中 a 、 b 為整數，請問 $a^2 - 2b^2$ 等於下列哪一個選項？

- (1) -1
- (2) 0
- (3) 1
- (4) 2
- (5) 3

二、多選題(占 30 分)

說明：第 7 題至第 12 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 已知 p 、 q 、 n 為正整數，且方程式 $x^3 + px^2 + qx + 2^n = 0$ 有一虛根為 $1 + \sqrt{15}i$ ，則下列哪些選項是正確的？

- (1) $1 - \sqrt{15}i$ 必為該方程式之一根
- (2) 此方程式必有一正實根
- (3) $p = 2$
- (4) $p + q = 10$
- (5) n 為質數

8. 若正實數 x 、 y 滿足 $\log_3 x = 1.7$ ， $\log_3 y = 5.1$ ，則下列哪些選項是正確的？

- (1) x^{10} 為 9 位數
- (2) x^{10} 個位數字為 9
- (3) $\log_3(x^3 + 2y) = 6.1$
- (4) $x^3 + 2y$ 的最高位數字為 9
- (5) $x^{10} + y^3$ 為 9 位數

9. 已知 a 、 b 、 c 為相異三實數，且

$$f(x) = \frac{1-a}{(a-b)(a-c)}(x-b)(x-c) + \frac{1-b}{(b-c)(b-a)}(x-c)(x-a) + \frac{1-c}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b),$$

則下列哪些選項是正確的？

- (1) $y = f(x)$ 有最小值
 - (2) $y = f(|x|)$ 有最大值
 - (3) $f(1.1^{0.9}) > f(0.9^{1.1}) > f(\log_{0.5} 5)$
 - (4) $\sum_{k=1}^{10} f(k)f(1+k) = 330$
 - (5) 對於任何一組數對 (a, b, c) 必可找到唯一一組實數對 (A, B, C) ，使得

$$f(x) = A(x-a)(x-b) + B(x-b) + C$$
10. 已知大雄和靜香兩人同班，且知班上有男生 20 人，女生 10 人，今使用簡單隨機抽樣，選出 3 人出公差，則下列哪些選項是正確的？
- (1) 已知選出的 3 人中有男有女，則大雄被抽中的機率大於靜香被抽中的機率
 - (2) 已知選出的三人同性別，則大雄被抽中的機率大於靜香被抽中的機率
 - (3) 抽樣的做法中，不管一次抽取 3 人或每次抽取一人逐次抽取，大雄和靜香兩人同時被抽中的機率相等
 - (4) 大雄和靜香兩人同時被抽中的機率大於 $\frac{1}{100}$
 - (5) 在大雄被抽中的條件下，靜香也被抽中的機率大於 $\frac{1}{10}$
11. 矩形 $OABC$ ，其中 $O(0,0)$ ， $A(2,1)$ ， B 在 y 軸的正向，設 $P(x,y)$ 為矩形邊上的動點，則下列哪些選項是正確的？
- (1) B 點坐標為 $(0,5)$
 - (2) $\overline{OC} = 2\overline{OA}$
 - (3) $3x+2y$ 在 A 點產生最大值
 - (4) $\frac{y}{x+1}$ 在 B 點產生最大值
 - (5) 滿足 $\sqrt{x^2+y^2}$ 為正整數值的點 $P(x,y)$ 共有 9 個

12. 甲、乙、丙、丁四人為參加高三第一次模擬考，週末在家溫書，下面列出他們四人週末在家各科的溫書時間(小時)和成績(分)結果，如表所示。

甲	社會	國文	自然	英文	數學
溫書時間	2	4	5	3	1
成績	100	70	80	60	50

乙	社會	國文	自然	英文	數學
溫書時間	2	3	3.5	2.5	1.5
成績	90	60	70	50	40

丙	社會	國文	自然	英文	數學
溫書時間	1	3	4	2	0
成績	80	56	64	48	40

丁	社會	國文	自然	英文	數學
溫書時間	5	0	3	1	2
成績	90	40	70	50	60

則下列哪些選項是正確的？

- (1) 四人成績標準差 $\sigma_{甲}$ 、 $\sigma_{乙}$ 、 $\sigma_{丙}$ 、 $\sigma_{丁}$ 的大小關係為： $\sigma_{甲} > \sigma_{乙} = \sigma_{丁} > \sigma_{丙}$
- (2) 四人的成績與溫書時間均為正相關
- (3) 甲乙丙三人的成績與溫書時間之相關係數全相等
- (4) 丁的成績與溫書時間之相關係數為 1
- (5) 甲乙丙三人成績對溫書時間的迴歸直線中最陡者為乙

第貳部分：選填題(占 40 分)

說明：1. 第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(13-33)。

2. 每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 若實係數二次函數 $f(x) = x^2 + ax + b$ 在 $-3 \leq x \leq 5$ 的範圍內，存在兩個相異的 x 值使 $f(x)$ 有相同最大值 3，則數對 $(a, b) = (\underline{1314}, \underline{151617})$ 。
- B. 紅綠建設公司在臺中打算建造 10 層樓高的總部大樓，為了突顯公司的特色，決定每層樓只能用紅色或綠色的油漆來粉刷，每層樓只用一個顏色，而且不能有連續兩層是紅色的，則他們有 181920 種可能的粉刷方式。

- C. 衛生單位長期針對甲、乙、丙三家食品工廠檢測是否含 A 、 B 兩種毒素，發現任何一家檢測出任一種毒素的機率皆為 $\frac{1}{2}$ ，且甲、乙、丙三家食品對於檢測結果互不影響，若檢測出至少含一種毒素的工廠就算不合格。在某次檢測中，已知這三家工廠皆不合格，則恰兩家工廠皆驗出兩種毒素的機率為 $\frac{\textcircled{21}}{\textcircled{22}}$ 。(化為最簡分數)
- D. 小胖、小美、小恩、小賢四人暑假去參加臺東熱氣球嘉年華活動，小胖、小美、小恩於鹿野高臺場地(視為一水平地面)相異三處，同時以仰角 60° 看到小賢搭熱氣球在空中向其他三人招手(不計三人身高)，若當時三人彼此之距離為 90 公尺、150 公尺、210 公尺，試問此時小賢所搭熱氣球離鹿野高臺場地之高度為 $\textcircled{23}\textcircled{24}\textcircled{25}$ 公尺。
- E. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{BC}=2$ ，點 D 在 \overline{AC} 上且 $\overline{AD}=1$ 、 $\overline{CD}=2$ 。若 $\angle BDC=2\angle A$ ，則 $\sin A = \frac{\sqrt{\textcircled{26}}}{\textcircled{27}}$ 。(化為最簡根式)
- F. $\triangle ABC$ 內部有一點 P ，使得 $2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$ ，若 $\overline{PB}=5$ 、 $\overline{PC}=7$ 、 $\overline{PA}=4$ ，則 $\triangle ABC$ 之面積為 $\textcircled{28}\textcircled{29}\sqrt{\textcircled{30}}$ 。(化為最簡根式)
- G. 設 x 、 y 為正數且 $9x+4y=100$ ，則 $\frac{xy}{x+y}$ 的最大值為 $\textcircled{31}$ 。
- H. 維維分別在甲、乙兩家銀行各存 10 萬元。已知甲銀行年利率 13.4%，乙銀行年利率 5%，若每年複利計算一次，則最快 $\textcircled{32}\textcircled{33}$ 年後(取整數年)由甲銀行得到的本利和至少為從乙銀行得到本利和的 2 倍。

可能用到的參考公式及數值

- 一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的公式解：
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
- 平面上兩點 $P_1(x_1, y_1)$ ， $P_2(x_2, y_2)$ 間的距離為 $\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- 點 $P(x_0, y_0)$ 至直線 $L: ax + by + c = 0$ 之距離為 $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
- 通過 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 的直線斜率 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ， $x_2 \neq x_1$
- $\triangle ABC$ 的正弦定理：
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

 $\triangle ABC$ 的餘弦定理：
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$
- 二倍角公式： $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ ， $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$
- 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ，
標準差 $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} ((\sum_{i=1}^n x_i^2) - n\mu_X^2)}$
- 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，相關係數 $r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$
迴歸直線(最適合直線)方程式為 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$
- $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ ， $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- 柯西不等式：已知 $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ ，則 $(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2)^2$
- 複利計算：本利和 = 本金 $\times (1 + \text{利率})^{\text{期數}}$
- 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$
- 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$