

# 全國公私立高級中學

## 103 學年度學科能力測驗第一次聯合模擬考試

考試日期：103 年 7 月 28~29 日

### 數學考科

#### — 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 7 題，多選題 6 題，選填題第 A 至 G 題共 7 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是  $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是  $\frac{3}{8}$ ，則考生必須

分別在答案卡上的第 18 列的  $\frac{3}{\square}$  與第 19 列的  $\frac{\square}{8}$  畫記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 C 題的答案格式是  $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是  $\frac{-7}{50}$  時，則考生必須分別在答案

卡的第 20 列的  $\frac{-}{\square}$  與第 21 列的  $\frac{7}{\square}$  畫記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

※ 試題後附有參考公式及可能用到的數值

## 第壹部分：選擇題（占 65 分）

### 一、單選題（占 35 分）

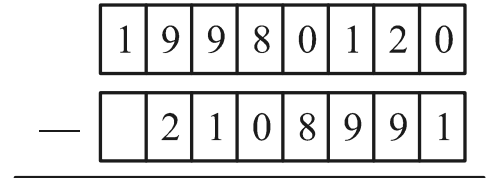
說明：第 1 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 共有多少個正整數  $n$ ，滿足  $7\sqrt{n}-3n+10>0$ ？
  - (1) 11
  - (2) 13
  - (3) 9
  - (4) 10
  - (5) 12
  
2. 2014 年，網路風行一個利用 2 的次方設計的小遊戲「2048」。遊戲過程中要把相同的數字相加即可獲得較大的數字。例如  $2+2=4$ 、 $4+4=8$ ，玩家必須在遊戲中獲得 2048 即算挑戰成功。下列關於 2 的次方的運算何者正確？
  - (1)  $2^2+2^1=2^3$
  - (2)  $2^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{2}}=2^0=0$
  - (3)  $2^{\frac{1}{2}}=2^{-1}$
  - (4)  $(-\sqrt{2})^2=-(\sqrt{2}^2)$
  - (5)  $2^{\sqrt{2}}+2^{\sqrt{2}}=2^{\sqrt{2}+1}$
  
3. 已知  $i=\sqrt{-1}$ ，複數  $z=\frac{2}{1+i}$ ，下列關於  $z$  的敘述何者正確？
  - (1)  $z$  的實部為 2
  - (2)  $z$  的虛部為  $\frac{2}{i}$
  - (3)  $\bar{z}=\frac{2}{1-i}$
  - (4)  $\bar{z}+z=2i$
  - (5)  $z^2=2$

4. 已知整係數多項式  $f(x)$  滿足  $f(x)(x-1) = 2x^6 - x^5 - x^3 + 2x - 2$ ，試求  $f(-1) + f(1)$  的值？
- (1) 0
  - (2) 6
  - (3) 1
  - (4) -1
  - (5) 3
5. 夏季開冷氣電費驚人。某學生看到網路消息「電風扇與冷氣同時開啓可以更省電」，該生決定測試家裡省電牌電風扇與冷氣同時開啓時是否會比較省電。若開啓的電風扇台數為  $x$ ，所花的電量為原來電量的  $r$  倍。已知  $r = \frac{(0.6)^x + 3}{4}$ ，則電風扇無論開幾台所求出的  $r$  值 不可能 為：
- (1) 0.9
  - (2) 0.84
  - (3) 0.804
  - (4) 0.7824
  - (5) 0.64214
6. 實數數線上  $A(\sqrt{46-6\sqrt{5}})$ 、 $B(\sqrt{14-6\sqrt{5}})$ ，已知  $P$  點在線段  $\overline{AB}$  上，且  $\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 1$ ，求  $P$  點座標 = ？
- (1)  $\sqrt{5} + 1$
  - (2)  $\sqrt{5} - 1$
  - (3)  $2\sqrt{5}$
  - (4) 2
  - (5)  $\frac{2\sqrt{5}-1}{4}$

7. 算命師 Alice 號稱可以預測你的生日密碼，首先欲算命的人將出生年月日寫下來，這數字為  $a$ ，再把這數字順序倒過來寫為  $b$ ，首位數為 0 時自動忽略。例如 1998 年 1 月 20 日生， $a=19980120$ ，倒過來寫為 02108991，首位數的 0 自動忽略，可得  $b=2108991$ ，如圖(1)所示。算命師 Alice 預測你的生日密碼  $|a-b|$  為  $n$  的倍數，此  $n$  為？

- (1) 11
- (2) 5
- (3) 9
- (4) 33
- (5) 6



圖(1)

## 二、多選題 (占 30 分)

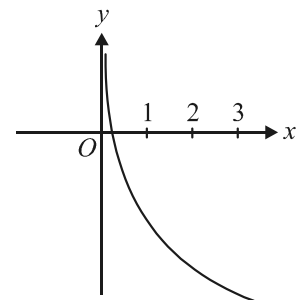
說明：第 8 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇 (填) 題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

8. 已知實係數多項式  $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 4$ ， $f(i+1) = f(i-1) = 2$ ，下列選項哪些正確？

- (1)  $a = 1$
- (2)  $b = c = d = 0$
- (3)  $a + b + c + d + 4 = 5$
- (4) 在實數範圍內解  $f(x) \geq 4$ ，得到的解為所有實數
- (5)  $f(x) = \sqrt{5}$  的解為四個虛根

9. 圖(2)為方程式  $y = a - \log_b x$  的圖形，下列選項哪些正確？

- (1)  $a > 0$
- (2)  $1 > b > 0$
- (3)  $b > 1$
- (4) 此圖形通過直線  $x = -1$  上的某一點  $(-1, s)$
- (5) 此圖形通過直線  $y = 4$  上的某一點  $(-t, 4)$



圖(2)

10.  $f(x)$  是四次實係數多項式， $f(-100)=200$ ， $f(200)=300$ ， $f(300)=-100$ ，已知  $f(x)$  除以  $(x+100)(x-200)(x-300)$  的餘式是  $r(x)$ 。下列選項哪些正確？

$$(1) r(x) = 200 \frac{(x-200)(x-300)}{(-100-200)(-100-300)} + 300 \frac{(x+100)(x-300)}{(200+100)(200-300)} - 100 \frac{(x+100)(x-200)}{(300+100)(300-200)}$$

(2)  $r(x)$  的  $x^2$  項係數不為 0

(3)  $f(x)-r(x)=0$  的解恰為四個實根

(4)  $f(x)=250$  的解至少有兩實數根

(5)  $y=r(x)-300$  的圖形恆不過第一象限

11. 下列方程式的圖形哪些恆在  $x$  軸的上方？

$$(1) y = 4x^{10} + 6x^4 + 3$$

$$(2) y = \sqrt{3^x} + \sqrt{3}$$

$$(3) y = 10 + 2\log_9 x$$

$$(4) y = |x^4 - 3x^3 + x - 2| + 1$$

$$(5) y = (0.9)^x - 0.01$$

12. 關於解不等式  $|x+7| < 3$ ，下列選項哪些正確？

(1) 可用數線解釋為數線上  $x$  與 7 的距離小於 3

(2) 不等式的解為  $4 < x < 10$

(3)  $x = \log_2 \frac{1}{32}$  滿足此不等式

(4)  $x = -3^{\frac{3}{2}}$  滿足此不等式

(5) 同時滿足不等式  $|x+7| < 3$  與  $|x+3| < 7$  的解為  $-4 > x > -10$

13. 關於下列不等式，請選出正確的選項。

(1)  $\frac{3^{-8} + 3^4}{2} > \frac{1}{9}$

(2)  $\log_3 \frac{1}{2} > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$

(3)  $\frac{\log 3 + \log 5}{2} > \log \sqrt{15}$

(4)  $\frac{\log \frac{1}{3} + \log \frac{1}{5}}{2} \geq \sqrt{(\log \frac{1}{3})(\log \frac{1}{5})}$

(5)  $(\sqrt{101})^{-5} < (\sqrt{101})^{-4}$

### 第貳部分：選填題（占 35 分）

說明：1. 第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號(14-27)。

2. 每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 一年二班數學平時考成績並不理想，數學老師因考量同學上課認真，決定以二次函數  $f(x) = a(x-80)^2 + c$  幫同學調整平時分數。只要將原始分數  $x$  代入函數即可得到調整後的分數。甲生原始分數為 60 分經調整後分數為 80 分，乙生原始分數為 80 分經調整後分數為 100 分，原始分數為 70 分的丙生經調整後分數應為 1415 分。

B. 已知直線  $y = x$  和圖形  $y = \log_a x$  恰有相異兩交點  $P$ 、 $Q$ 。假設原點座標為  $O$ ，且  $P$  點恰好為  $\overline{OQ}$  中點，求  $\overline{OQ}^2 = \underline{16}17。$

C. 方程式  $(x-2)^3 + 4(x-2)^2 - x - 2 = 0$  的三根為  $\alpha, \beta, \gamma$ ，求  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \underline{\textcircled{18}\textcircled{19}}$ 。

D. 若  $i = \sqrt{-1}$ ，計算  $\frac{(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \dots + \frac{1}{i^{14}})}{1+i+i^2+\dots+i^{13}} = \underline{\textcircled{20}\textcircled{21}}$ 。

E. 利用下列對數表求與  $100\log(\frac{1.51}{1.39})^5$  最接近的整數為  $\underline{\textcircled{22}\textcircled{23}}$ 。

$x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014

F. 一個線上遊戲的企劃總監觀察其虛擬寶物—魔法卡的售價  $p$  元 ( $25 > p > 5$ )，當售價訂得太低，遊戲太簡單很容易玩膩；售價訂得太高，玩家會覺得太困難，兩者都會造成玩家的流失。企劃總監發現平均每一個玩家每月願意購買魔法卡的數量  $x$  滿足  $x = \frac{2000}{p-5}$ ，  
 玩家願意持續玩的時間為  $\frac{-p^2 + 25p - 100}{5}$  個月。試求售價訂為多少時，總獲利可以達到最多？  
 $p = \underline{\textcircled{24}\textcircled{25}}$ 。(總獲利 = 售價  $\times$  每月購買數量  $\times$  持續玩的時間)

G. 已知  $a$  為方程式  $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$  一根，求  $a^4 + a^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4} = \underline{\textcircled{26}\textcircled{27}}$ 。

### 參考公式及可能用到的數值

1. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.14$
2. 算幾不等式：當  $a > 0, b > 0$  時， $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$  恆成立
3. 內分點公式：若數線上兩點  $A(a), B(b)$ ， $P$  在線段  $\overline{AB}$  上，且滿足  $\overline{AP} : \overline{PB} = m : n$ ，則  $P$  點座標為  $\frac{na+mb}{m+n}$
4. 根與係數關係：二次方多項式方程式  $ax^2+bx+c=0$  的兩根分別為  $\alpha, \beta$ ，則 
$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} \end{cases}$$
5. 根與係數關係：三次方多項式方程式  $ax^3+bx^2+cx+d=0$  的三根分別為  $\alpha, \beta, \gamma$ ，
$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} \end{cases}$$
6. 對數運算公式：若  $a > 0, a \neq 1$  且  $x, y$  均為正實數， $r$  是任意實數
  - (1)  $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
  - (2)  $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
  - (3)  $\log_a x^r = r \log_a x$
7. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$