

全國公私立高級中學

103 學年度學科能力測驗第二次聯合模擬考試

考試日期：103 年 9 月 3~4 日

數學考科

— 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 6 題，選填題第 A 至 H 題共 8 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生必須

分別在答案卡上的第 18 列的 $\frac{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\frac{\square}{8}$ 畫記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案

卡的第 20 列的 $\frac{-}{\square}$ 與第 21 列的 $\frac{7}{\square}$ 畫記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

※ 試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題（占60分）

一、單選題（占30分）

說明：第1題至第6題，每題有5個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得5分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 已知 x 為有理數，則滿足方程式 $x(x - \frac{\pi}{2})(2^x - \frac{1}{2})(\log_2 x - \frac{1}{2}) = 0$ 的相異解 x 有幾個？

- (1) 0
- (2) 1
- (3) 2
- (4) 3
- (5) 4

2. 下列各組資料，何者的標準差最大？

A ：1, 2, 3, 4, 5

B ：2011, 2012, 2013, 2014, 2015

C ：1, 3, 5, 7, 9

D ：-10, -20, -30, -40, -50

E ：-501, -502, -503, -504, -505

- (1) A
- (2) B
- (3) C
- (4) D
- (5) E

3. 已知實數 α 、 β 為實係數方程式 $x^2+ax+b=0$ 的兩根，且滿足以下兩個條件：

(I) $\log\alpha+\log\beta=\log 6$ ；(II) $2^\alpha\times 2^\beta=256$ 。

則 $a-b$ 值為？

- (1) -14
- (2) -2
- (3) 0
- (4) 2
- (5) 14

4. 已知實數 a 、 b 滿足 $\frac{2^a+2^b}{2}=\sqrt{2^{a+b}}$ ，請選出正確的選項。

- (1) $a=b$ ，且 a 、 b 均不為 0
- (2) $a=b$ ，且 a 、 b 均為正實數
- (3) $(a^2+b^2)(1^2+1^2)=(a+b)^2$
- (4) $\frac{\log 2^a+\log 2^b}{\log 2}=\log\sqrt{2^{a+b}}$
- (5) 方程式 $x^2+ax+b=0$ 必定有實數解

5. 已知二次實係數多項式 $f(x)=x^2-2x+m$ ， $g(x)=-x^2+2x+n$ ，若 $y=f(x)g(x)$ 的圖形與 x 軸恰有兩個相異交點，請選出正確的選項。

- (1) m 值可能等於 1
- (2) n 值可能等於 -1
- (3) 若 $m=2$ ，則 n 有可能等於 -2
- (4) 若 $m=-1$ ，則 n 有可能等於 0
- (5) 若 $m=0$ ，則 n 有可能等於 0

6. 設 $(2+i)^6 = a+bi$ ，其中 $a、b$ 為整數， $i=\sqrt{-1}$ ，請問 b 等於下列哪一個選項。
- (1) $2^6 C_0^6 + 2^2 C_4^6$
 - (2) $2^5 C_1^6 - 2^3 C_3^6 + 2 C_5^6$
 - (3) $2^6 C_0^6 - 2^4 C_2^6 + 2^2 C_4^6 - C_6^6$
 - (4) $2^6 C_0^6 + 2^4 C_2^6 + 2^2 C_4^6 + C_6^6$
 - (5) $2 C_1^6 + 2^2 C_2^6 + 2^3 C_3^6 + 2^4 C_4^6 + 2^5 C_5^6 + 2^6 C_6^6$

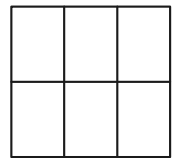
二、多選題 (占 30 分)

說明：第 7 題至第 12 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇 (填) 題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 下列各式的大小關係，請選出正確的選項。
- (1) $\sqrt{2014} - \sqrt{2013} > \sqrt{2013} - \sqrt{2012}$
 - (2) $2^{2014} - 2^{2013} > 2^{2013} - 2^{2012}$
 - (3) $(0.5)^{2014} - (0.5)^{2013} > (0.5)^{2013} - (0.5)^{2012}$
 - (4) $\log 2014 - \log 2013 > \log 2013 - \log 2012$
 - (5) $C_{14}^{20} - C_{13}^{20} > C_{13}^{20} - C_{12}^{20}$
8. 某次考試結束後，至少有 2 人分數不同，平均成績為 40 分，老師決定調整成績，考慮兩種不同的分數調整方法。以 X 表示原來的成績，且每位學生的成績用 0 至 100 評分。若兩種新成績的計算方式分別為 $Y = \frac{4}{5}X + 20$ 、 $Z = \frac{5}{4}X + 10$ 。請選出正確的選項。
- (1) Y 的平均分數小於 Z 的平均分數
 - (2) Y 的標準差小於 Z 的標準差
 - (3) X 與 Y 的相關係數為 0.8
 - (4) Y 與 Z 的相關係數為 1
 - (5) 若 $X' = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$ 、 $Y' = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}$ ，其中 μ_X 、 μ_Y 分別為 X 、 Y 的平均數， σ_X 、 σ_Y 分別為 X 、 Y 的標準差，則以最小平方法求得 Y' 對 X' 的迴歸直線為 $Y' = \frac{4}{5}X'$

9. 某公司共有 4 個工廠，第 k 個工廠的產量占全部的 $\frac{k}{10}$ ，其中 $k=1,2,3,4$ ，且所生產的產品都放進同一倉庫中。由過去的經驗知道，第 1 及第 2 工廠的產品不良率分別為 $\frac{1}{50}$ 、 $\frac{2}{50}$ ，第 3 及第 4 工廠的產品不良率分別為 $\frac{3}{100}$ 、 $\frac{4}{100}$ ，爲了檢驗倉庫中這一批產品的品質，從倉庫中任意抽出一件。請選出正確的選項。
- (1) 抽出第 2 個工廠的產品機率爲 0.2
 - (2) 抽出不良品的機率小於 0.04
 - (3) 抽出第 2 個工廠的產品且爲不良品的機率爲 0.04
 - (4) 若抽出不良品，則這個不良品來自第 2 個工廠的條件機率爲 0.2
 - (5) 若抽出不良品，則這個不良品來自第 4 個工廠的條件機率爲來自第 2 個工廠的條件機率的 2 倍

10. 將數字 1、2、3、4、5、6 填入圖(1)空格中，每格填入一個數字，數字不重複使用，請選出正確的選項。



圖(1)

- (1) 任意填入有 720 種不同的填法
 - (2) 若第一列都是偶數，第二列都是奇數，有 72 種不同的填法
 - (3) 若每一直行上方數字小於下方數字，有 90 種不同的填法
 - (4) 若每一橫列都是由左而右愈來愈大，有 120 種不同的填法
 - (5) 若每一直行的數字和均相等，有 48 種不同的填法
11. 已知實係數多項式 $f(x) = -x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = g(x)h(x)$ ， $g(x)$ 、 $h(x)$ 均爲實係數二次多項式，且 $g(x)$ 的二次項係數爲 1， $g(2i-1)=0$ 。若平面上 $y=g(x)$ 和 $y=h(x)$ 圖形有相同的頂點。請選出正確的選項。
- (1) $g(2i+1)=0$
 - (2) $a+b+c+d > 0$
 - (3) $f(x)=0$ 恰有兩個有理數解
 - (4) 若 $-1 \leq x \leq 1$ ，則 $h(x)$ 有最小值 4
 - (5) 若 $f(x) > 0$ ，則 $x < -3$ 或 $x > 1$

12. 小明在數線上從原點出發，每次投擲公正硬幣一枚，若出現正面則往正向走一步，反面則往正向走兩步。若連續投擲 n 次後，用 a_k 表示過程中小明位於座標 k 的機率 (k 為正整數， $n \leq k \leq 2n$)。請選出正確的選項。
- (1) $a_1 < a_2$
 - (2) $a_2 < a_3$
 - (3) $a_{k+2} = \frac{1}{2}a_{k+1} + \frac{1}{2}a_k$
 - (4) 若 $b_k = a_{k+1} - a_k$ ，則數列 $\langle b_k \rangle$ 為公比 $\frac{1}{2}$ 的等比數列
 - (5) $a_{10} = \frac{683}{1024}$

第貳部分：選填題（占 40 分）

說明：1. 第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號(13-30)。
2. 每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

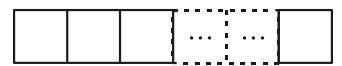
A. 已知 n 為正整數，若 $\frac{1}{\sqrt{20-2\sqrt{96}}} < \frac{n}{8} < \frac{1}{\sqrt{28-16\sqrt{3}}}$ ，且 $\frac{n}{8}$ 為最簡分數，則 $n = \underline{\textcircled{13}\textcircled{14}}$ 。

B. 已知兩變量 X 、 Y 的數據如右表，設以最小平方法求得 Y 對 X 的迴歸直線為 $y = \frac{1}{2}x + 2$ ，則 $a + b = \underline{\textcircled{15}}$ 。

X	1	3	2	4
Y	2	a	b	3

C. 已知 A 、 B 、 C 為相異三事件，且 A 、 B 為獨立事件， A 、 C 為互斥事件。若 $P(B) = \frac{2}{3}$ ， $P(C) = \frac{1}{2}$ ，且 $P(A \cup B) = P(A \cup C)$ ，則 $P(A) = \frac{\textcircled{16}}{\textcircled{17}}$ 。(化為最簡分數)

- D. 已知 $a > 0$ ，若不等式 $|2x - a| < 1$ 及 $x^2 - ax + \frac{3}{4} < 0$ 有相同的實數解集合，則 $a = \underline{\textcircled{18}}$ 。
- E. 若將 $(1.5)^{60}$ 化成有限小數，其整數部分有 a 個數字，小數點後有 b 個數字，則數對 $(a, b) = (\underline{\textcircled{19}\textcircled{20}}, \underline{\textcircled{21}\textcircled{22}})$ 。
- F. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 首項為 1，且為公差不是 0 的等差數列，其中 a_3 、 a_6 、 a_{10} 三數恰成等比數列。若前 n 項和 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ，則使得 $S_n > 10$ 的最小正整數 n 為 $\textcircled{23}$ 。
- G. 座標平面上，甲、乙兩人從原點出發，分別投擲一枚公正骰子兩次。若兩次出現的點數依序為 a 、 b ，則走到點 (a, b) 的位置。則兩人所走到的點位置相異，且與原點三點共線的機率為 $\frac{\underline{\textcircled{24}\textcircled{25}}}{\underline{\textcircled{26}\textcircled{27}\textcircled{28}}}$ 。(化為最簡分數)
- H. 如圖(2)，有 k 個相鄰的正方形， k 為正整數。若用 3 種不同的顏色塗滿所有正方形，顏色可重複使用，但相鄰不可同色，將所有可能的不同的塗法數記為 a_k ，則滿足 $\sum_{k=1}^n a_k > 10^4$ 的最小正整數 n 為 $\textcircled{29}\textcircled{30}$ 。



圖(2)

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a_1 ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$

首項為 a_1 ，公比為 $r (r \neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

2. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

標準差 $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} ((\sum_{i=1}^n x_i^2) - n\mu_X^2)}$

3. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，相關係數 $r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

則 Y 對 X 的迴歸直線(最適合直線)方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

4. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236, \sqrt{6} \approx 2.449, \pi \approx 3.142$

5. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010, \log_{10} 3 \approx 0.4771, \log_{10} 5 \approx 0.6990, \log_{10} 7 \approx 0.8451$