

# 臺北區 103 學年度第一學期 第三次學科能力測驗模擬考試

## 數學考科

### — 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 5 題，多選題 7 題，選填題第 A 至 H 題共 8 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是  $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是  $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡的第 18 列的  $\square^3$  與第 19 列的  $\square^8$  畫記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±

例：若第 C 題的答案格式是  $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是  $\frac{-7}{50}$  時，則考生必須分別在

答案卡的第 20 列的  $\square^-$  與第 21 列的  $\square^7$  畫記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±

※ 試題後附有參考公式及可能用到的數值

## 第壹部分：選擇題（占 60 分）

### 一、單選題（占 25 分）

說明：第 1 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

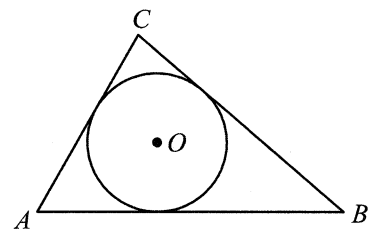
1. 請問下列何者是無理數？
  - (1) 3.1415
  - (2)  $1.\bar{3}$
  - (3) 方程式  $x^2=3$  的根
  - (4)  $\sin 15^\circ \times \cos 15^\circ$
  - (5)  $(\log_5 \frac{5}{2}) + (\log_5 10)$
  
2. 設二次實係數多項式函數  $f(x) = ax^2 - 4ax + b$  在區間  $1 \leq x \leq 5$  上的最大值為 12、最小值為 -6。已知  $a < 0$ ，則  $b$  的值為下列何者？
  - (1) 9
  - (2) 4
  - (3) 2
  - (4) -9
  - (5) -12
  
3. 李浩餅舖因不慎購買了餽水油製作店內商品，為挽回誠信，接受顧客憑發票退費。今顧客傑哥拿發票前往店家退費時，發現發票上各產品的數量已模糊不清，僅知總消費金額為 500 元，且餅舖只販售芝麻肉餅、綠豆凸、紅豆餡餅與蛋黃酥四種商品。已知芝麻肉餅一盒為 200 元，綠豆凸、紅豆餡餅與蛋黃酥一盒均為 100 元，試問傑哥在購買商品時有幾種可能組合？
  - (1) 13 種
  - (2) 21 種
  - (3) 24 種
  - (4) 34 種
  - (5) 56 種

4. 若  $1 - \frac{1}{4}C_1^n + (\frac{1}{4})^2 C_2^n - (\frac{1}{4})^3 C_3^n + \dots + (\frac{-1}{4})^n C_n^n < \frac{1}{1000}$ ，則滿足左式的最小正整數  $n$  為下列何數？

- (1) 21
- (2) 22
- (3) 23
- (4) 24
- (5) 25

5. 如圖(1)，已知  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} > \overline{AC}$ ，且  $O$  為  $\triangle ABC$  內切圓的圓心，則下列何者正確？

- (1)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$
- (2)  $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} > \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC}$
- (3)  $\overrightarrow{AO}$  在  $\overline{AB}$  上的正射影長度大於  $\overrightarrow{AO}$  在  $\overline{AC}$  上的正射影長度
- (4)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \geq \overline{AB} \times \overline{AC}$
- (5) 若  $\overline{AB} : \overline{AC} = 3 : 2$ ，則  $\overrightarrow{AO} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$



圖(1)

## 二、多選題 (占 35 分)

說明：第 6 題至第 12 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇 (填) 題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

6. 已知  $f(x) = x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  為一個實係數多項式，則下列敘述哪些正確？
- (1) 若  $x-5$  能整除  $f(x)$ ，則 5 能整除  $a_0$
  - (2) 若  $f(2)f(3) > 0$ ，則  $f(x)=0$  在 2 與 3 之間沒有實根
  - (3) 若  $a_0 = 0$ ，則  $f(x)=0$  至少有一實根
  - (4) 若  $1+2i$  為  $f(x)=0$  之一根，則  $f(1-2i)=0$
  - (5) 若  $x^4 - 2x^2 - 3$  能整除  $f(x)$ ，則  $f(x)=0$  必存在有理根

7. 在坐標平面上，圓  $C$  是圓心在原點且半徑為 2 的圓。若在第一象限中，此圓與  $y=4^x$  和  $y=\frac{1}{2}\log_2 x$  的圖形分別交於點  $A(x_1, y_1)$  和點  $B(x_2, y_2)$ ，則下列敘述哪些正確？
- (1)  $x_1^2 + y_1^2 = 4$
  - (2)  $y_1 < 2$
  - (3)  $x_1 > \frac{1}{2}$
  - (4)  $x_1 + y_1 > x_2 + y_2$
  - (5) 直線  $AB$  的斜率小於  $-1$
8. 已知  $\triangle ABC$  中， $\overline{BC} = 2\overline{AB}$ ，且  $\triangle ABC$  的外接圓直徑恰與  $\overline{BC}$  等長。 $D$  為  $\triangle ABC$  外接圓上異於  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的點，下列敘述哪些正確？
- (1)  $\triangle ABC$  面積等於  $\frac{1}{4} \times \overline{BC} \times \overline{AC}$
  - (2) 不論  $D$  點在圓上何處， $\cos \angle ADC$  恆為  $\frac{1}{2}$
  - (3) 若  $B$  點的極坐標為  $[1, 30^\circ]$ ，且  $\triangle ABC$  外接圓圓心在原點，則  $C$  點的極坐標可為  $[1, 210^\circ]$
  - (4)  $\cos \angle ABD = \cos \angle ACD$
  - (5)  $\sin \angle ABD = \sin \angle ACD$
9. 試就下列各給定條件，判斷關於二次曲線的敘述，哪些正確？
- (1) 方程式  $|x-2| = \sqrt{(x+4)^2 + (y-1)^2}$  所表圖形為一個拋物線
  - (2) 方程式  $\left| \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} - \sqrt{(x-5)^2 + (y+6)^2} \right| = 10$  所表圖形為一個雙曲線
  - (3) 若  $P$  為雙曲線  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$  上的一點，已知  $F_1$  與  $F_2$  為該雙曲線的兩焦點，且  $\overline{PF_1} : \overline{PF_2} = 1 : 4$ ，則  $\triangle PF_1F_2$  的周長必為 20
  - (4) 雙曲線  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{2} = 1$  與橢圓  $\frac{x^2}{14} + \frac{y^2}{3} = 1$  有共同的焦點
  - (5)  $x^2 - 4y^2 - 2x - 16y - 19 = 0$  的漸近線斜率為  $\pm 2$

10. 某班期末考數學科成績  $x_i$  的算術平均數  $\mu_x$  為 36 分，標準差為  $\sigma_x$  為 9 分。因為成績太低，數學老師想替每位同學加分，提出了三個方案：(每種方式加分後沒有超過 100 分的情形)

方案一：每個人都以  $y_i = \frac{3}{2}x_i + 6$  方式加分

方案二：每個人都以  $z_i = 10\sqrt{x_i}$  方式加分

方案三：每個人都以  $w_i = x_i + 24$  方式加分

則下列敘述哪些正確？

- (1) 無論採取何種方案加分，加分後的平均都為 60 分
  - (2) 採取方案二，加分後的標準差  $\sigma_z$  為 30 分
  - (3) 採取方案一，所得成績的標準差為  $\sigma_y$ ；採取方案三，所得成績的標準差為  $\sigma_w$ ；則  $\sigma_y > \sigma_w$
  - (4) 採取方案一所得成績與原始成績的相關係數為  $r_{xy}$ ；採取方案三所得成績與原始成績的相關係數為  $r_{xw}$ ；則  $r_{xy} = r_{xw}$
  - (5) 方案一成績  $y_i$  對原始成績  $x_i$  的迴歸直線，和方案三成績  $w_i$  對原始成績  $x_i$  的迴歸直線相同
11. 裡常熔化工廠欲建立一新的丙烯輸送管線。今使用電腦軟體模擬管線的空間配置，並以某儲藏槽為空間坐標原點，且原有的管線和牆面分別以空間中的直線與平面表示(在電腦中，管線與牆面厚度不計)。已知新的管線為通過  $(2, 1, -2)$ 、 $(3, 2, 0)$  兩點的直線，若原有的管線及牆面與新管線不相交，則可保留。試問下列哪些原有的管線或牆面是可以保留的？
- (1)  $x + y + 2z - 5 = 0$
  - (2)  $2x + 4y - 3z - 14 = 0$
  - (3)  $x + y - z - 4 = 0$
  - (4)  $\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 3x - y + 2z = 2 \end{cases}$
  - (5)  $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$

12. 某市即將舉辦市長選舉，民調公司根據選前半年的民調指出，有 3 成的民眾會投票給候選人科南，有 5 成民眾會投票給候選人金田一，有 2 成民眾不願表態。已知兩位候選人在選前恰有多次同日發表競選廣告，且民調公司只在兩位候選人同日發表競選廣告隔天才會實施民調。民調公司發現只要兩位候選人每次在同日發表競選廣告後，民調結果必有以下改變：

- (i) 原本支持候選人科南的民眾有 6 成仍支持科南，有 3 成轉而支持候選人金田一，有 1 成不願表態
- (ii) 原本支持候選人金田一的民眾有 5 成仍支持金田一，有 2 成轉而支持候選人科南，有 3 成不願表態
- (iii) 原本不願表態的民眾有 2 成仍不願表態，有 4 成轉而支持候選人科南，有 4 成轉而支持候選人金田一

試就前述所給訊息，選出下列正確的選項：

- (1) 兩位候選人同日發表競選廣告後，矩陣  $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.5 & 0.4 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$  可為其轉移矩陣
- (2) 兩位候選人在第一次同日發表競選廣告後，候選人科南的民調會上升至 3 成 6
- (3) 兩位候選人在第一次同日發表競選廣告後，候選人金田一的民調會下降至 3 成 6
- (4) 兩位候選人在第二次同日發表競選廣告後，候選人科南的民調結果較第一次發表時上升
- (5) 兩位候選人在多次同日發表競選廣告後，民調結果逐漸趨近穩定，此時候選人科南的民調結果會高於候選人金田一的民調結果

### 第貳部分：選填題（占 40 分）

說明：1. 第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號(13-30)。

2. 每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 設  $k$  為一整數，且  $\frac{k}{3} < \sqrt{7+\sqrt{48}} < \frac{k+1}{3}$ ，則  $k = \underline{\textcircled{13}\textcircled{14}}$ 。
- B. 平面上有一平行四邊形  $ABCD$ ，且  $A(1,2)$ 、 $B(3,3)$ 、 $D(4,5)$ ，則平行四邊形  $ABCD$  的面積為  $\underline{\textcircled{15}}$ 。
- C. 小明和小美經常玩猜拳遊戲。已知小明是個懶惰鬼，所以出石頭的機率是  $\frac{1}{2}$ ，出剪刀和布的機率一樣；而小美喜歡拍照，所以出剪刀的機率是  $\frac{1}{2}$ ，出石頭和布的機率一樣；而且兩人出拳互不影響。今兩人猜拳一次，若已知小明獲勝，請問小明出石頭的機率為  $\frac{\textcircled{16}}{\textcircled{17}}$ 。(化成最簡分數)

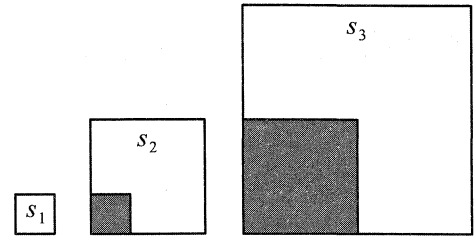
D. 有 20 個由小到大的正方形，其邊長分別為  $a_1, a_2, \dots, a_{20}$ ，而其面積分別為  $A_1, A_2, \dots, A_{20}$ 。

已知各個正方形邊長滿足：

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + (n+1), (n=1, 2, \dots, 19) \end{cases}。$$

如圖(2)中的白色區域面積，定義一個數列  $\langle s_k \rangle$  滿足

$$\begin{cases} s_1 = A_1 \\ s_{k+1} = A_{k+1} - A_k, (k=1, 2, 3, \dots, 19) \end{cases}，則 s_{10} = \underline{\textcircled{18}} \underline{\textcircled{19}} \underline{\textcircled{20}} \underline{\textcircled{21}}。$$

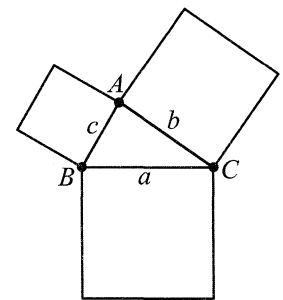


圖(2)

E. 已知圓上三點  $A(0, 3)$ 、 $B(4, 3)$ 、 $C(6, 1)$ ，求此圓圓心與直線  $3x - 4y - 12 = 0$  的距離為  $\frac{\textcircled{22}}{\textcircled{23}}$ 。(化成最簡分數)

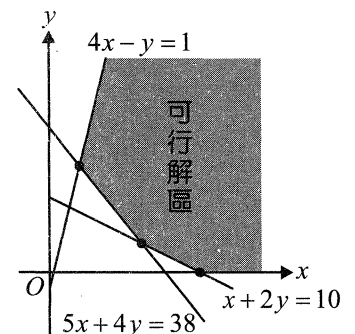
F.  $\triangle ABC$  中，已知  $\sin A : \sin B : \sin C = 6 : 4 : 7$ ， $\overline{BC} = 6$ 。若  $D$  在  $\overline{BC}$  上，且  $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ ，則  $\overline{AD} = \sqrt{\textcircled{24} \textcircled{25}}$ 。

G. 如圖(3)，三角形中  $\angle A$  的對邊長為  $a$ 、 $\angle B$  的對邊長為  $b$ 、 $\angle C$  的對邊長為  $c$ ，此三邊分別向外做一正方形，三個正方形的面積和為 100。若在  $\triangle ABC$  的內部中任取一點  $P$ ，使得  $P$  點到  $\overline{BC}$  的距離為 3， $P$  點到  $\overline{AC}$  的距離為 4， $P$  點到  $\overline{AB}$  的距離為 5，則  $\triangle ABC$  最大面積為  $\underline{\textcircled{26}} \underline{\textcircled{27}} \sqrt{\textcircled{28}}$ 。(化成最簡根式)



圖(3)

H. 因為伊波拉病毒肆虐，國際衛生組織決定組成考察團，前往非洲山區做一日考察。今向專業遊覽車公司租用中小型休旅車前往，恰需租用 60 輛車，而遊覽車公司提供三種車型與租用價格如下表。考察團再根據各所需條件，假設 6 人座休旅車租用  $x$  輛，7 人座休旅車租用  $y$  輛，利用線性規劃得到如圖(4)中的可行解區域。當 6 人座休旅車租  $m$  輛，7 人座休旅車租  $n$  輛時，租車費用最高，則  $m = \textcircled{29}$ 、 $n = \textcircled{30}$ 。



圖(4)

車型(不含司機)	每日每輛租車費
6 人座	1300 元
7 人座	1400 元
8 人座	1900 元

### 參考公式及可能用到的數值

1. 首項為  $a$ ，公差為  $d$  的等差數列，前  $n$  項之和為  $S = \frac{n[2a + (n-1)d]}{2}$

首項為  $a$ ，公比為  $r (r \neq 1)$  的等比數列，前  $n$  項之和為  $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和差角公式： $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

3.  $\triangle ABC$  的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$  ( $R$  為  $\triangle ABC$  外接圓半徑)

$\triangle ABC$  的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

4. 一維數據  $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，算術平均數  $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

$$\text{標準差 } \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} [(\sum_{i=1}^n x_i^2) - n\mu_X^2]}$$

4. 二維數據  $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，相關係數  $r_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

迴歸直線(最適合直線)方程式  $y - \mu_Y = r_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236, \sqrt{6} \approx 2.449, \pi \approx 3.142$

7. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010, \log_{10} 3 \approx 0.4771, \log_{10} 5 \approx 0.6990, \log_{10} 7 \approx 0.8451$