

# 全國公私立高級中學

103 學年度學科能力測驗第四次聯合模擬考試

考試日期：103 年 12 月 18~19 日

## 數學考科

### — 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 6 題，選填題第 A 至 H 題共 8 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是  $\frac{18}{19}$ ，而依題意計算出來的答案是  $\frac{3}{8}$ ，則考生必須

分別在答案卡上的第 18 列的  $\frac{3}{\square}$  與第 19 列的  $\frac{8}{\square}$  畫記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 C 題的答案格式是  $\frac{20}{50}$ ，而答案是  $\frac{-7}{50}$  時，則考生必須分別在答案

卡的第 20 列的  $\frac{-}{\square}$  與第 21 列的  $\frac{7}{\square}$  畫記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

※ 試題後附有參考公式及可能用到的數值

### 第壹部分：選擇題（占60分）

#### 一、單選題（占30分）

說明：第1題至第6題，每題有5個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得5分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

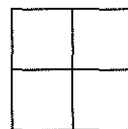
1. 若一數列  $\langle a_n \rangle$ ，定義為：
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 7a_n + 3, n \geq 1 \end{cases}$$
，則  $a_n$  的個位數 不可能 是下列哪一個

數字？

- (1) 0
- (2) 1
- (3) 2
- (4) 3
- (5) 4

2. 將 1、2、3、4 分別填入圖(1)的方格內，每格一個數字，數字不可重複，試問數字 2、3 相鄰(即 2、3 在同一列或同一行)的機率為何？

- (1)  $\frac{1}{4}$
- (2)  $\frac{1}{3}$
- (3)  $\frac{1}{2}$
- (4)  $\frac{2}{3}$
- (5)  $\frac{3}{4}$



圖(1)

3. 若  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = K$ ，則  $\begin{vmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ 3a-2c & 3b-2d \end{vmatrix} = ?$

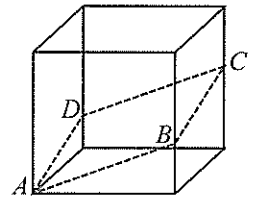
- (1)  $-13K$
- (2)  $-5K$
- (3)  $-K$
- (4)  $5K$
- (5)  $13K$

4. 設一拋物線  $\Gamma$  的頂點為  $V$ ，焦點為  $F$ ，焦距為 2。若  $P$  為拋物線  $\Gamma$  上一點，且  $\overline{PV} = \overline{PF}$ ，則  $\Delta PVF$  的面積為何？

- (1)  $\frac{3}{2}\sqrt{2}$   
 (2)  $2\sqrt{2}$   
 (3)  $\frac{5}{2}\sqrt{2}$   
 (4)  $3\sqrt{2}$   
 (5)  $\frac{7}{2}\sqrt{2}$

5. 圖(2)中的正立方體平放在桌面上，而四邊形  $ABCD$  是某一平面截此正立方體所得的圖形。若此正立方體的邊長為 1，且  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三點到桌面的距離分別為  $0$ 、 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{2}{3}$ ，則  $D$  點到桌面的距離為何？

- (1)  $\frac{1}{10}$   
 (2)  $\frac{1}{9}$   
 (3)  $\frac{1}{8}$   
 (4)  $\frac{1}{7}$   
 (5)  $\frac{1}{6}$



圖(2)

6. 設  $f(x)$  為一個二次多項式，則  $f(1)$ 、 $f(2)$ 、 $f(3)$ 、 $f(5)$  必滿足下列哪一個選項？

- (1)  $f(1) - 8f(2) + 2f(3) = f(5)$   
 (2)  $2f(1) + 8f(2) - 4f(3) = f(5)$   
 (3)  $3f(1) - 8f(2) + 6f(3) = f(5)$   
 (4)  $4f(1) + 8f(2) - 8f(3) = f(5)$   
 (5)  $5f(1) - 8f(2) + 10f(3) = f(5)$

## 二、多選題 (占 30 分)

說明：第 7 題至第 12 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 在坐標空間中，下列哪些選項的解集合代表過  $A(2, 0, 1)$ 、 $B(1, 2, -1)$  兩點的直線？

(1)  $2x - 3y - 4z = 0$

(2) 
$$\begin{cases} x = 2 - \frac{1}{2}t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \text{ 爲實數}$$

(3)  $\frac{x-1}{1} = \frac{2-y}{2} = \frac{z+1}{2}$

(4) 
$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

(5) 
$$\begin{cases} 2x - 3y - 4z = 0 \\ 2x + 2y + z = 5 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

8. 設  $A(3, 1, -2)$ 、 $B(1, -1, -1)$ 、 $C(7, 2, -1)$ 、 $D(5, k, 2k)$  爲坐標空間中四個點，請選出正確的選項。

(1)  $\angle BAC = 135^\circ$

(2)  $\triangle ABC$  的面積小於 5

(3) 若  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  四點共平面，則  $k > 0$

(4) 若  $k = 1$ ，則由三向量  $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AC}$ 、 $\overrightarrow{AD}$  所張出的平行六面體體積爲 18

(5) 若  $\overrightarrow{AD}$  在  $\overrightarrow{AC}$  上的正射影爲  $\overrightarrow{AC}$ ，則  $k < 0$

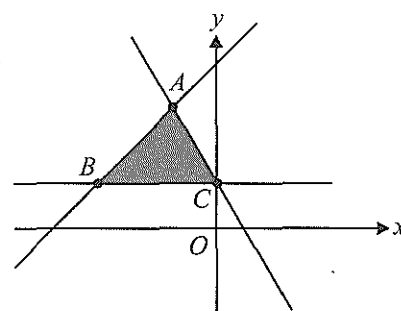
9. 設  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  為三次實係數多項式，且複數  $i+2$  為方程式  $f(x)=0$  的解，請選出正確的選項。

- (1)  $f(i-2)=0$
- (2) 若  $f(i)=2-i$ ，則  $f(i^3)=2+i$
- (3) 若  $3x-2$  為  $f(x)$  的因式，則 3 是  $a$  的因數且 2 是  $d$  的因數
- (4) 若  $f(1)=0$ ，則  $b=d$
- (5) 若  $f(0)>0$  且  $f(-2)<0$ ，則  $f(-4)<0$

10. 如圖(3)，在坐標平面上，設二元一次聯立不等式 
$$\begin{cases} 2x+y \leq 1 \\ ax-by \geq c \\ y \geq 1 \end{cases}$$

的可行解區域為  $\triangle ABC$  內部及其邊界，若目標函數  $px - qy$  在  $B$  點產生最小值，且在  $A$  點產生最大值。請選出正確的選項。

- (1)  $a > 0$
- (2)  $b > 0$
- (3)  $c > 0$
- (4)  $p \geq 0$
- (5)  $p + 2q \geq 0$



圖(3)

11. 在坐標平面上，自圓  $C: x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$  外一點  $P$  作兩切線，切點為  $A$ 、 $B$ 。若直線  $PA$  的方程式為  $3x + 4y + 2 = 0$ ，且直線  $AB$  的方程式為  $x = 2y$ 。請選出正確的選項。

- (1) 圓  $C$  的圓心坐標為  $(1, 1)$
- (2)  $A$  點座標為  $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$
- (3) 直線  $PB$  的方程式為  $x + 2 = 0$
- (4)  $\triangle PAB$  的面積為  $\frac{8}{5}$
- (5) 在圓  $C$  上共有 4 個點與  $P$  點的距離為正整數

12. 設有 10 位同學第一次段考與第二次段考的數學成績分別以  $X$ 、 $Y$  表示，已知  $X$  的平均數為  $\bar{X}=60$ ， $X$  的標準差為  $\sigma_X=3$ ， $Y$  的平均數為  $\bar{Y}=70$ ，而  $X$  與  $Y$  的相關係數為 0.9，且  $Y$  對  $X$  的迴歸直線通過點  $(70, 73)$ 。請選出正確的選項。
- (1)  $Y$  對  $X$  的迴歸直線方程式為  $Y=0.3X+52$
  - (2)  $Y$  的標準差為  $\sigma_Y=1$
  - (3) 這 10 位同學第二次段考的數學成績都不低於 60 分
  - (4) 若  $X'$ 、 $Y'$  分別表示  $X$ 、 $Y$  標準化後所得的成績，則  $X'$  與  $Y'$  的相關係數為 0.9
  - (5) 若  $X'$ 、 $Y'$  分別表示  $X$ 、 $Y$  標準化後所得的成績，則  $Y'$  對  $X'$  的迴歸直線方程式為  $Y'=0.3X'$

第貳部分：選填題（占 40 分）

說明：1. 第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號(13-31)。  
2. 每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 若  $2^{x+3} = 3^{x+1}$ ，則  $(\frac{3}{2})^x = \frac{\textcircled{13}}{\textcircled{14}}$ 。(化為最簡分數)
- B. 設  $a$  為正整數，若滿足絕對值不等式  $1 \leq |x - \sqrt{2}| \leq a$  的整數  $x$  共有 12 個，則  $a = \underline{\textcircled{15}}$ 。
- C. 設  $a$  為正整數，若  $a^{10}$  為一個 22 位數的正整數，且  $a^{20}$  為一個 43 位數的正整數，則滿足這兩個條件的  $a$  共有 1617 個。(請利用所附的對數表)

常用對數表  $y = \log_{10} x$

$x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279

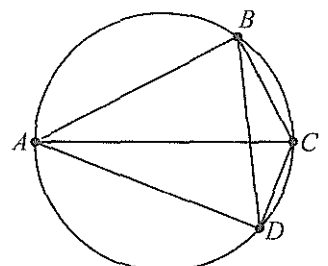
D. 設  $A, B$  均為 2 階方陣，若  $A - B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ ， $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ，則行列式  $\det(A^2 - B^2) = \underline{\textcircled{18}\textcircled{19}\textcircled{20}}$ 。

E. 某高中供應午餐的便當共有 3 種，已知學生阿成從星期一到星期五這 5 天的午餐想要每種便當至少都吃過一次，那麼阿成吃便當的選擇共有  $\textcircled{21}\textcircled{22}\textcircled{23}$  種。

F. 在坐標平面上，已知  $F_1, F_2$  為雙曲線  $\Gamma: x^2 - \frac{y^2}{k} = 1$  的兩個焦點，其中  $k$  為待定的常數，而  $P$  為  $\Gamma$  上一點。若  $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 14$ ，且  $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$ ，則  $k = \underline{\textcircled{24}\textcircled{25}}$ 。

G. 一個「搶 10」遊戲規則是：自裝有編號 1 到 20 號的球各一個的袋子中，取一球並記下該球編號，隨即放回袋中。若甲、乙兩人取得的球號加上各自的初始號碼，有一方總和為 10 的倍數，即為贏家，若兩方總和均為 10 的倍數時，則以取得球號較大者為贏家。已知甲、乙的初始號碼分別為 1、2，且袋中每一球被取出的機會均等，在甲與乙各取一球後甲即獲勝的條件下，則甲取得的球號小於乙取得的球號的機率為  $\frac{\textcircled{26}\textcircled{27}}{\textcircled{28}\textcircled{29}}$ 。(化為最簡分數)

H. 如圖(4)，四邊形  $ABCD$  為圓內接四邊形。若  $\overline{BC} = 4\sqrt{5}$ ， $\overline{CD} = 5$ ，且  $\angle BAC = 2\angle DAC$ ，則  $\overline{BD} = \underline{\textcircled{30}\textcircled{31}}$ 。



圖(4)

### 參考公式及可能用到的數值

1. 一元二次方程式  $ax^2+bx+c=0$  的公式解：
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2. 坐標平面上，兩點  $P_1(x_1, y_1)$ ， $P_2(x_2, y_2)$  間的距離為  $\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$   
點  $(x_0, y_0)$  到直線  $ax+by+c=0$  的距離為  $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

3. 三角函數的和角公式： $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$

4.  $\triangle ABC$  的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ， $R$  為  $\triangle ABC$  的外接圓半徑

$\triangle ABC$  的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

5. 資料  $X$ ： $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，算術平均數  $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

標準差  $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$

6. 資料  $X$ ： $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，資料  $Y$ ： $y_1, y_2, \dots, y_n$ ，則  $X$ 、 $Y$  的相關係數

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \text{ 其中 } \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$$

$Y$  對  $X$  的迴歸直線方程式： $y - \bar{y} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x})$

7. 參考數值： $\sqrt{2} \doteq 1.414$ ， $\sqrt{3} \doteq 1.732$ ， $\sqrt{5} \doteq 2.236$ ， $\sqrt{6} \doteq 2.449$