

臺中區國立高級中學

105 學年度學科能力測驗第一次聯合模擬考試

考試日期：105 年 11 月 3~4 日

數學考科

— 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 7 題，選填題第 A 至 G 題共 7 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{18}{19}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生必須

分別在答案卡上的第 18 列的 $\frac{3}{19}$ 與第 19 列的 $\frac{8}{19}$ 畫記，如：

18	$\frac{1}{19}$	$\frac{2}{19}$	$\frac{3}{19}$	$\frac{4}{19}$	$\frac{5}{19}$	$\frac{6}{19}$	$\frac{7}{19}$	$\frac{8}{19}$	$\frac{9}{19}$	$\frac{0}{19}$	-	±
19	$\frac{1}{19}$	$\frac{2}{19}$	$\frac{3}{19}$	$\frac{4}{19}$	$\frac{5}{19}$	$\frac{6}{19}$	$\frac{7}{19}$	$\frac{8}{19}$	$\frac{9}{19}$	$\frac{0}{19}$	-	±

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{20 \text{ 21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案

卡的第 20 列的 $\frac{-}{50}$ 與第 21 列的 $\frac{7}{50}$ 畫記，如：

20	$\frac{1}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{4}{50}$	$\frac{5}{50}$	$\frac{6}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{8}{50}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{0}{50}$	-	±
21	$\frac{1}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{4}{50}$	$\frac{5}{50}$	$\frac{6}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{8}{50}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{0}{50}$	-	±

※ 試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 將 $\frac{9}{13}$ 化為小數時，設小數點後第 n 位的數字記為 $f(n)$ ，則下列哪一個數最大？
 - (1) $f(2016)$
 - (2) $f(2017)$
 - (3) $f(2018)$
 - (4) $f(2019)$
 - (5) $f(2020)$

2. 對所有正整數 n ，滿足 $f(n) = \begin{cases} \log_{32} n, & \log_{32} n \text{ 為有理數} \\ 0, & \log_{32} n \text{ 為無理數} \end{cases}$ ，則 $\sum_{n=1}^{2016} f(n) = ?$
 - (1) 2016
 - (2) 10
 - (3) 11
 - (4) $\frac{55}{32}$
 - (5) $\frac{66}{5}$

3. 甲、乙、丙、丁、戊五個人排成一列，甲和乙要排在一起，且甲旁邊不能排丙或丁，則有幾種排列方式？
 - (1) 12
 - (2) 18
 - (3) 20
 - (4) 24
 - (5) 36

4. 從 $1, 2, 3, \dots, 100$ 共一百個自然數中選出兩個相異的數，則此兩數之和大於 100 的機率為下列哪一個選項？

- (1) $\frac{25}{99}$
- (2) $\frac{50}{99}$
- (3) $\frac{25}{100}$
- (4) $\frac{50}{100}$
- (5) $\frac{51}{100}$

5. 在 $\triangle ABC$ 中， $\tan A$ 、 $\tan B$ 為 $x^2 + (-2a-1)x + 3a = 0$ 之兩根，且 $\angle C = 45^\circ$ ，則 $a = ?$

- (1) -2
- (2) $-\frac{1}{5}$
- (3) 0
- (4) $\frac{1}{5}$
- (5) 2

6. 坐標平面上，若 $A(-2, 4)$ ， O 為原點，且點 $P(a, b)$ 滿足 $(\vec{OA} - \vec{OP}) \cdot (\vec{OA} - \vec{OP}) = 72$ 。若 $k = a + b$ ，則 k 的最大值為下列哪一個選項？

- (1) 12
- (2) 14
- (3) 20
- (4) 36
- (5) 48

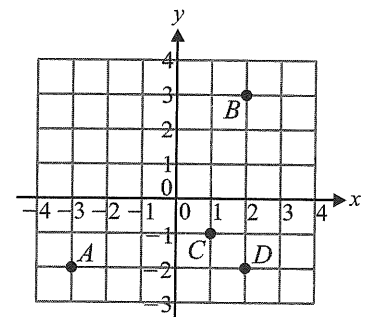
二、多選題 (占 35 分)

說明：第 7 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇 (填) 題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 設實係數多項式 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，則下列哪些選項可能為不等式 $f(x) > 0$ 之解？
- (1) $-1 < x < 0$ 或 $1 < x < 2$
 - (2) $0 < x < 2$ 但 $x \neq 1$
 - (3) $x < 1$ 或 $x > 2$
 - (4) $x < 1$ 或 $x > 1$
 - (5) 所有的實數
8. 已知兩函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 圖形互相對稱於直線 $x - y = 0$ ，若 $f(x) = \log_2(x + 3)$ ， $x > -3$ 。試問下列哪些是正確的選項？
- (1) $f(x) = 2016$ 有實數解
 - (2) $y = g(x)$ 的圖形與 $y + 3 = 0$ 可能有交點
 - (3) $\log_5 g(7) = 3$
 - (4) $f(-2) \times f(0) \times f(2) \times \cdots \times f(2016) = 105$
 - (5) $f(\log 9) + f(\log 81) > 2f(\log 27)$
9. 已知等比數列 $\langle a_n \rangle$ 的每一項均為實數，公比為 r ，且 $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_9 = 1$ ， $a_{13} = \frac{1}{16}$ ，則下列哪些是正確的選項？
- (1) $a_3 \times a_7 = 1$
 - (2) $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 - (3) $a_4 > 1$
 - (4) $a_{99} > a_{101}$
 - (5) $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} = \frac{63}{8}$

10. 有一組二維數據 (x_i, y_i) ，其中 y 對 x 的迴歸直線方程式為 $y = \frac{3}{5}x + 12$ ，且平均數 $\mu_x = 60$ ，而 y 對 x 的相關係數為 $r_{(x,y)}$ 。今有另一組二維數據 (s_i, t_i) ，其中 $s_i = -\frac{1}{3}x_i + 15$ ， $t_i = \frac{1}{4}y_i + 3$ ，若 t 對 s 的迴歸直線方程式為 $L: t = a + bs$ ，則下列哪些是正確的選項？
- (1) $r_{(x,y)} > 0$
 - (2) t 對 s 的相關係數為 $-\frac{1}{12}r_{(x,y)}$
 - (3) L 通過 $(-5, 15)$
 - (4) $a > 0$
 - (5) $b = \frac{9}{20}$

11. 如圖(1)，直角坐標平面上， $A(-3, -2)$ ， $B(2, 3)$ ， $C(1, -1)$ ， $D(2, -2)$ ，今從 A 沿著格線走捷徑到 B ，則下列哪些是正確的選項？
- (1) 走法共有 252 種
 - (2) 必經過 C 的走法有 16 種
 - (3) 不經過 C 也不經過 D 的走法有 226 種
 - (4) 必經第四象限的走法有 26 種
 - (5) 經過原點且在原點處要轉彎的走法有 100 種



圖(1)

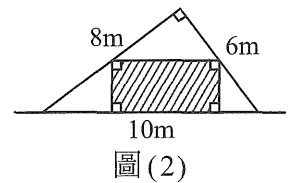
12. 已知 A 、 B 、 C 、 D 在同一平面上，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $4\sin A - \sin B = 3$ 且 $4\cos A + \cos B = 2\sqrt{3}$ 。若 $\triangle ABC$ 外有一點 D 滿足 $\overline{DA} \perp \overline{AC}$ ， $\overline{DB} \perp \overline{BC}$ ，且 $\overline{CD} = 10$ ，則下列哪些是正確的選項？
- (1) $\cos(A+B) = \frac{1}{2}$
 - (2) $\angle C$ 為銳角
 - (3) $\overline{AB} = 5\sqrt{2}$
 - (4) $\triangle ABC$ 外接圓面積為 25π
 - (5) $\overline{AD} \times \overline{BC} + \overline{AC} \times \overline{BD} = 50\sqrt{3}$

13. 設 O 為原點， $A(6,0)$ 、 $B(0,8)$ ，圓 $C: x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 - a^2 = 0$ ($a > 0$)，若圓 C 與 $\triangle OAB$ 有 4 個交點，則 a 值可為下列哪些選項？
- (1) 2.5
 - (2) 3
 - (3) 3.5
 - (4) 4
 - (5) 5

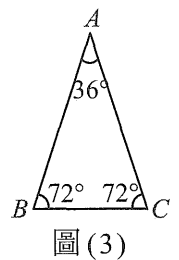
第貳部分：選填題（占 35 分）

說明：1. 第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（14–34）。
2. 每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 如圖(2)，有一塊三邊長為 6、8、10 公尺的直角三角形形狀的空地，今欲在此空地中蓋房子，房子地基為矩形，且此房子地基的一邊是在三角形的斜邊上，則此地基的最大面積為 1415 平方公尺。



- B. 如圖(3)， $\triangle ABC$ 為一等腰三角形， $\overline{AC} = 1$ ， $\overline{BC} = 2k$ ，則 $4k^3 + 6k^2 + 9k + 11$ 之值為 1617 + 18 $\sqrt{5}$ 。

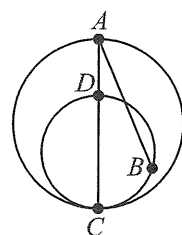


C. 已知 $2^{\log_x 81} = 3^{\log_y 16} = k$ 且 $\log_3 x + \log_2 y = 1$ ，則 $k = \underline{\textcircled{19}\textcircled{20}\textcircled{21}\textcircled{22}}$ 。

D. 小玉、小花等 5 位轉學生，要分到 A 、 B 、 C 三個班級，每班最多 3 人，則小玉、小花被分配到不同班級的方法有 $\textcircled{23}\textcircled{24}\textcircled{25}$ 種。

E. 設 A 、 B 為樣本空間 S 中的兩事件， $P(B) = \frac{1}{3}$ ， $P(A \cup B') = \frac{3}{4}$ ，且 $P(A|B') = P(A)$ ，則 A 、 B 至少有一事件發生的機率為 $\frac{\textcircled{26}}{\textcircled{27}}$ 。(請化為最簡分數)

F. 如圖(4)，有兩個圓內切於 C 點，大圓半徑為 3，小圓半徑為 2， A 點為大圓上一點， B 、 D 兩點均在小圓上，若 $\overline{AC} = 6$ ， $\overline{AB} = 5$ ，則 $\overline{BD} = \frac{\sqrt{\textcircled{28}\textcircled{29}}}{2}$ 。



圖(4)

G. 已知邊長為 3 的正 $\triangle ABC$ 中， P 為其內部一點，且 $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ ，則

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \frac{\textcircled{30}\textcircled{31}\textcircled{32}}{\textcircled{33}\textcircled{34}}$ 。(請化為最簡分數)

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n[2a + (n-1)d]}{2}$

首項為 a ，公比為 $r (r \neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

4. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

$$\text{標準差 } \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - n\mu_X^2}$$

5. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，相關係數 $r_{(X,Y)} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

迴歸直線(最適合直線)方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$

7. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$

8. 三角函數值： $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$