

# 全國公私立高級中學

## 105 學年度學科能力測驗第一次聯合模擬考試

考試日期：105 年 7 月 26~27 日

### 數學考科

#### — 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 7 題，選填題第 A 至 G 題共 7 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是  $\frac{18}{19}$ ，而依題意計算出來的答案是  $\frac{3}{8}$ ，則考生必須

分別在答案卡上的第 18 列的  $\frac{3}{19}$  與第 19 列的  $\frac{8}{19}$  畫記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 C 題的答案格式是  $\frac{20 \text{ 21}}{50}$ ，而答案是  $\frac{-7}{50}$  時，則考生必須分別在答案

卡的第 20 列的  $\frac{-}{50}$  與第 21 列的  $\frac{7}{50}$  畫記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

※ 試題後附有參考公式及可能用到的數值

## 第壹部分：選擇題（占65分）

### 一、單選題（占30分）

說明：第1題至第6題，每題有5個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得5分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 滿足  $f(x) = 2x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 4x - 1 < 0$  的整數有幾個？
  - (1) 1
  - (2) 2
  - (3) 3
  - (4) 4
  - (5) 5
  
2.  $f(x) = 3^{-|\log_3 x|}$  在下列哪個區間為遞增函數？
  - (1)  $0 < x < 1$
  - (2)  $1 < x < 2$
  - (3)  $2 < x < 3$
  - (4)  $3 < x < 4$
  - (5)  $4 < x < 5$
  
3. 已知  $f(x) = x^2 - 53x + 196 + |x^2 - 53x + 196|$ ，則  $f(20) + f(14) = ?$ 
  - (1) -928
  - (2) -300
  - (3) 0
  - (4) 300
  - (5) 928

4. 已知  $a$  為實數，函數  $y = \frac{2x+a}{4x^2-9}$  與  $y=1$  只有一個交點，則滿足此條件的  $a$  值有幾個？

- (1) 0
- (2) 1
- (3) 2
- (4) 3
- (5) 4

5. 若  $a$ 、 $b$  是方程式  $2(\log x)^2 - 4\log x + 1 = 0$  的根，則  $(\log \frac{a}{b})^2$  的值為？

- (1) 1
- (2) 2
- (3) 3
- (4) 4
- (5) 5

6. 化簡  $\log_2(\sqrt{17+12\sqrt{2}} + \sqrt{17-12\sqrt{2}}) = ?$

- (1)  $\log_2 3$
- (2) 2
- (3)  $\frac{1}{2}\log_2 17$
- (4)  $\frac{5}{2}$
- (5)  $\log_2 6$

## 二、多選題 (占 35 分)

說明：第 7 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇 (填) 題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 若對任意實數  $x$ ， $t^2 + 5t \leq |2x - 4| - |x + 2|$  恆成立，下列哪些  $t$  值滿足此條件？

- (1) 0
- (2) -1
- (3)  $-\pi$
- (4)  $-\frac{11}{3}$
- (5)  $-\frac{17}{4}$

8. 若  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  為滿足方程式  $x^4 - 7x^2 + x + 2 = 0$  的解，請選出正確的選項。

- (1)  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  為四實根
- (2)  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  為兩實根兩虛根
- (3) 當  $-3 \leq x \leq 0$ ，則  $x^4 - 7x^2 + x + 2 = 0$  無實根
- (4) 若  $f(x)$  是領導係數為 1 的四次多項式且滿足  $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = -1$ ，則  $f(x) = 0$  有兩實根兩虛根
- (5) 若  $f(x)$  是領導係數為 1 的四次多項式且滿足  $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = -1$ ，則當  $1 \leq x \leq 2$ ， $f(x)$  恆負

9. 已知  $a$  為實數且  $f(x) = a \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 3 \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + 4 \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$ ，請選出正確的選項。

- (1)  $f(x)$  為二次多項式
- (2) 若  $a=4$ ，則  $y=f(x)$  有最小值為 3
- (3) 若  $g(x) = \frac{a-2}{2}(x-2)(x-3) + (x-2) + 3$ ，則  $f(x) = g(x)$
- (4) 存在  $g(x)$  為一次多項式，滿足  $g(1) = f(1)$ ， $g(2) = f(2)$ ， $g(3) = f(3)$
- (5) 存在  $g(x)$  為三次多項式，滿足  $g(1) = f(1)$ ， $g(2) = f(2)$ ， $g(3) = f(3)$

10. 設  $f(x) = 2^x$ ， $g(x) = 3^x$ ， $h(x) = \log_2 x$ ， $k(x) = \log_3 x$ ，請選出正確的選項。

- (1)  $y = f(x)$  與  $y = h(x)$  兩圖形對稱於直線  $y = x$
- (2) 當  $x > 1$  時，則  $y = k(x)$  恆大於  $y = h(x)$
- (3)  $y = f(x)$  與  $y = k(x)$  兩圖形不相交
- (4)  $y = g(x)$  與  $y = g(-x)$  兩圖形對稱於  $x$  軸
- (5)  $y = f(-x)$  與  $y = -h(x)$  兩圖形的交點落在直線  $y = x$  上

11. 設  $a = \frac{1}{7}$ ， $b = \log_{128} \frac{3}{2}$ ， $c = \log_2 \frac{2}{3}$ ，請選出正確的選項。

- (1)  $a > b > c$
- (2)  $14a + 7b + c = 2$
- (3) 若將  $2^c$  化成小數，則  $2^c$  為循環小數
- (4) 若將  $a = \frac{1}{7}$  化成小數，小數點後第 100 位的數字為 8
- (5)  $\log 2^{-7b}$  的首數為 0

12. 已知  $a$ 、 $b$  為任意正實數且  $a < b$ ，設數線上 6 個點  $A, B, P, Q, R, S$  的坐標分別為：

$$A(a), B(b), P\left(\frac{5a+b}{6}\right), Q\left(\frac{a+b}{2}\right), R\left(\frac{-2a+7b}{5}\right), S\left(\frac{5a-2b}{3}\right),$$
 請選出正確的選項。

- (1)  $A, B, P, Q$  四點在數線上由左至右為  $A, P, Q, B$
- (2)  $A, B, P, S$  四點在數線上由左至右為  $A, P, S, B$
- (3) 有 3 個點在  $A, B$  之間
- (4) 在  $P, Q, R, S$  中， $S$  是最靠近  $A$  的點
- (5) 數線上一點  $C(\sqrt{ab})$ ，則  $Q$  在  $C$  的右方

13. 已知函數  $f(x) = \begin{cases} \log_2(1+x), & x \geq 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(1-x), & x < 0 \end{cases}$ ，請選出正確的選項。

- (1) 函數  $y = f(x)$  為奇函數
- (2) 函數  $y = f(x)$  對  $y$  軸對稱
- (3) 對所有的實數  $x$ ，函數  $y = f(x) \geq 0$  恆成立
- (4) 任意兩個實數  $a, b$ ，當  $a+b \geq 0$ ，則  $f(a)+f(b) \geq 0$
- (5)  $f(10)+f(-21) < 0$

### 第貳部分：選填題（占 35 分）

說明：1. 第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（14-27）。

2. 每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 已知集合  $A = \{x \mid |x-1| < 4\}$ ， $B = \{x \mid \log_2 x > \log_3 x\}$ ，則集合  $A$  與集合  $B$  的交集為  $\{x \mid a < x < b\}$ ，求  $a-b = \underline{\textcircled{14}\textcircled{15}}$ 。

B. 若函數  $f(x) = \log_a(x^2 - 2ax + 1 - 2a^2)$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $x$  為實數) 的最大值是 2, 則  $a = \frac{\textcircled{16}}{\textcircled{17}}$ 。

(化成最簡分數)

C. 若  $|x+3| \leq 1$ ,  $|y-3| \leq 1$ , 則  $\frac{y+2}{x-1}$  的最小值為 ⑱⑲。

D. 已知  $f(x)$  是三次實係數多項式, 若  $f(1-i) = 3$ ,  $f(-1) = -2$ ,  $f(0) = 5$ , 則  $f(1) = \textcircled{20}$ 。

E. 已知  $f(x)$ 、 $g(x)$  為實係數多項式, 且  $f(x)$  為偶函數,  $g(x)$  為奇函數, 若  $f(x) + g(x) = x^2 + 10x + 8$ , 則  $g(10) = \textcircled{21}\textcircled{22}\textcircled{23}$ 。

F. 若正實數  $a$ 、 $b$  滿足  $\log_8 a + \log_4 b^2 = 5$  和  $\log_8 b + \log_4 a^2 = 7$ , 則  $\log_4 a + \log_8 b^2 = \textcircled{24}$ 。

G. 已知二次函數  $f(x)$  滿足對任意實數  $x$ ,  $x^2 - 2x + 2 \leq f(x) \leq 2x^2 - 4x + 3$  恆成立。若  $f(11) = 181$ , 則  $f(16) = \textcircled{25}\textcircled{26}\textcircled{27}$ 。

### 參考公式及可能用到的數值

1. 對定義域內每個  $x$ ，函數  $f(x)$  恆有  $f(-x) = -f(x)$  時，則稱  $f(x)$  為奇函數。
2. 對定義域內每個  $x$ ，函數  $f(x)$  恆有  $f(-x) = f(x)$  時，則稱  $f(x)$  為偶函數。
3. 一元二次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  的公式解：
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
4. 若  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  皆為實數，且  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  為  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  的三根，則  $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$ ，
$$\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = \frac{c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$
5. 算幾不等式
  - (1) 設  $a \geq 0$ 、 $b \geq 0$ ，則  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
  - (2) 當  $a = b$  時， $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ ；當  $a \neq b$  時， $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$
6. 參考數值： $\log 2 \approx 0.301$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 7 \approx 0.8451$