臺北區 105 學年度第一學期
第一次學科能力測驗模擬考試

數學考科

—作答注意事項—

考試範圍：第一～二冊全

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 5 題，多選題 7 題，選填題第 A 至 H 題共 8 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記，請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{\text{⑱}}{\text{⑲}}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 3 與第 19 列的 8 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
19	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{\text{⑳㉑}}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 − 與第 21 列的 7 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
21	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

祝考試順利

99363103-25

第壹部分：選擇題（占 60 分）

一、單選題（占 25 分）

說明：第 1 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 在數線上，滿足 $|x-2|+|x+3|\le 9$ 且 $|x-2|-|x+3|\le 2$ 的整數總共有多少個？
   (1) 5 個
   (2) 6 個
   (3) 7 個
   (4) 8 個
   (5) 9 個

2. 已知 k、t 均為實數，$k\cdot 4^t=6$ 且 $k\cdot 8^t=30$，則 t 的值為下列何者？
   (1) $\log_5 2$
   (2) $\log_5 4$
   (3) $\log_2 5$
   (4) $\log_4 5$
   (5) $\log_5 10$

3. 某綜藝節目中，挑戰者可選擇一個特製的公正骰子，與主持人持有的公正骰子(點數為 1、2、3、4、5、6)同時擲出，觀察兩人擲出的點數。若挑戰者骰子點數為主持人骰子點數之倍數時，則挑戰者獲勝！試問挑戰者選擇的特製骰子為下列哪一個時，獲勝機率最高？
   (1)點數為 1、2、3、4、4、4
   (2)點數為 1、1、2、2、3、3
   (3)點數為 1、1、1、2、2、2
   (4)點數為 1、1、2、3、4、5
   (5)點數為 2、2、3、3、3、3

4. a、b 為整數，若方程式 $x^3-ax^2+bx+15=0$ 有三個整數根，則 a 可能情形有多少種？
   (1) 4 種
   (2) 6 種
   (3) 7 種
   (4) 8 種
   (5) 9 種

5. 茜茜是個喜愛烹飪的高中生，有一天她將一條鮭魚從冷凍庫拿出來解凍。茜茜希望在烹煮時，魚的溫度至少為 20 ℃ 以上，因此茜茜以「小時」為單位，紀錄解凍後的時間與溫度，如下表所示：

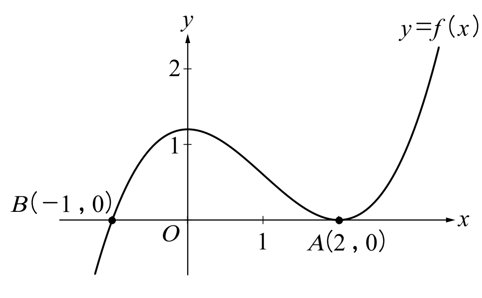
時間(小時)	0	1	2	4
魚的溫度(℃)	-4	-3	-2	1

舉例來說，拿出來解凍 2 小時後，魚的溫度為 -2 ℃。
茜茜利用此 4 筆資料來做一個次數為 3 次的插值多項式，用來模擬真實的溫度函數。
試利用此三次多項式來估計，拿出來解凍至少幾小時(整數)後，茜茜就可以開始調理鮭魚？
(1) 6 小時
(2) 7 小時
(3) 8 小時
(4) 9 小時
(5) 10 小時

二、多選題（占 35 分）

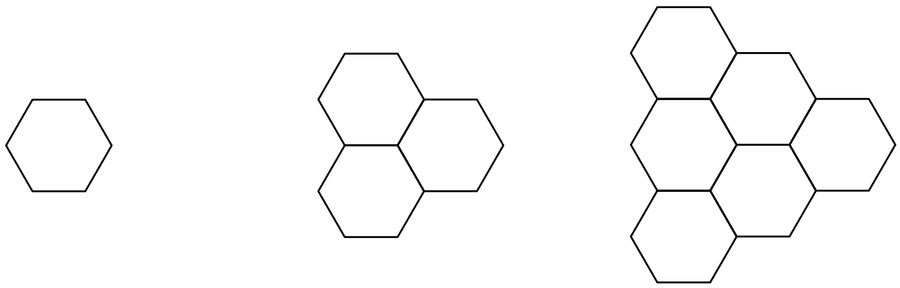
說明：第 6 題至第 12 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

6. 三次多項式 $y=f(x)$ 的圖形如右圖所示，已知 A 點坐標為 $(2, 0)$、B 點坐標為 $(-1, 0)$。請問下列哪些選項正確？
(1) $f(-1)=0$
(2) $f\left(\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{2}{3}\right)$
(3) $f(x)<0$ 的解為 $x<-1$
(4) $f(-x)\geq 0$ 的解為 $x\leq -1$
(5) $x\cdot f(x)<0$ 的解為 $-1<x<0$



7. 已知數列 $\langle a_n\rangle$ 為每項皆為正數的等差數列，且公差 $d\neq 0$。數列 $\langle b_n\rangle$ 為每項皆為正數的等比數列，且公比 $r\neq 1$。請問下列哪些選項正確？
(1) $\langle 3a_n\rangle$ 為公差是 $3d$ 的等差數列
(2) $\langle a_n+5\rangle$ 為公差是 $d+5$ 的等差數列
(3) $\langle 3b_n\rangle$ 為公比是 $3r$ 的等比數列
(4) $\langle (b_n)^3\rangle$ 為公比是 r^3 的等比數列
(5) $\langle \log b_n\rangle$ 為公差是 r 的等差數列

8. 觀察下列各圖形，第㈠圖為 6 根邊長為 1 的磁條圍成的正六邊形，第㈡圖用了 15 根邊長為 1 的磁條圍成 3 個邊長為 1 的正六邊形，第㈢圖用了 27 根邊長為 1 的磁條圍成 6 個邊長為 1 的正六邊形。依此規則增加，請問下列哪些選項正確？



第㈠圖　第㈡圖　第㈢圖

⑴第㈣圖有 10 個邊長為 1 的正六邊形
⑵第㈣圖用了 45 根邊長為 1 的磁條
⑶第㈤圖有 15 個邊長為 1 的正六邊形
⑷第㈤圖用了 64 根邊長為 1 的磁條
⑸從第㈠圖到第㈩圖共有 220 個邊長為 1 的正六邊形

9. 設三次多項式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，請問下列哪些選項正確？
⑴若 a，b，c，d 為實數，$i=\sqrt{-1}$，且 $f(1+i)=3$，則 $f(1-i)=-3$
⑵若 a，b，c，d 為有理數，且 $f(1+\sqrt[3]{2})=0$，則 $f(1-\sqrt[3]{2})=0$
⑶若 a，b，c，d 為整數，且 $2x+4$ 為 $f(x)$ 之因式，則 $2\mid a$ 且 $4\mid d$
⑷若 a，b，c，d 為正整數，則方程式 $f(x)=0$ 至少有一負實數根
⑸若 $f(x)=0$ 有三相異正實數根，則方程式 $f(x^3)=0$ 亦有三相異正實數根

10. 請問下列哪些選項正確？
⑴ $y=2^x$ 的函數圖形與 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的函數圖形對稱於 y 軸
⑵當 $x>0$ 時，$10^x>x^2$ 恆成立
⑶設 $0<x_1<x_2$，則 $\frac{\log x_1+\log x_2}{2}>\log\frac{x_1+x_2}{2}$
⑷方程式 $x+\log x=0$ 恰有一實根
⑸方程式 $2^x=|\log_2 x|$ 恰有一實根

11. 坐標平面上以原點為中心，半徑為 1 的圓上有一個內接正六邊形，已知 $P_1(1, 0)$為其中一個頂點，順時針方向頂點依序為 P_2，P_3，P_4，P_5，P_6。今在 P_1 上放置一個棋子，並擲一顆公正的骰子若干次，若每次點數出現 k 點，則棋子就依順時針方向往相鄰頂點跳動 k 步，例如：第一次擲出 2 點，則棋子將從 P_1 移動到 P_3；第二次擲出 5 點，則棋子接著從 P_3 移動到 P_2，……，依此類推。請問下列哪些選項正確？

(1)棋子從 P_1 開始，擲兩次骰子，則最後的位置在 P_1 的機率為 $\frac{1}{6}$

(2)棋子從 P_1 開始，擲兩次骰子，則最後的位置在 P_2 的機率為 $\frac{1}{6}$

(3)棋子從 P_1 開始，擲三次骰子，則最後的位置在 P_1 的機率為 $\frac{1}{36}$

(4)棋子從 P_1 開始，擲 n 次骰子$(n \geq 2)$，令最後的位置在 P_1 的機率為 a_n，則 $a_{n+1} = \frac{1}{6} a_n$

(5)棋子從 P_1 開始，擲六次骰子，則最後的位置在 P_1 的機率為 $\frac{1}{6}$

12. 孝順的阿文想在父親節時幫老爸的手機換新的資費，他將原方案與新方案第一年每月月租費做了比較，如下表所示，試問下列敘述哪些是正確的？

方案	第 1 個月	第 2 個月	第 3 個月	第 4 個月	第 5 個月	第 6 個月	第 7 個月	第 8 個月	第 9 個月	第 10 個月	第 11 個月	第 12 個月
原方案	239	269	279	289	289	289	339	339	359	359	389	389
新方案	219	239	259	279	289	299	309	309	339	369	399	399

(單位：元)

(1)僅考慮第一年所花費的金額，新方案的費用較原方案划算

(2)新方案之標準差小於原方案之標準差

(3)新方案之標準差大於原方案之標準差

(4)在原方案中，中位數＞平均數＞眾數

(5)在原方案中，中位數＞平均數＝眾數

第貳部分：選填題（占 40 分）

說明：1.第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(13－30)。
2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 2，除以 $x+2$ 的餘式為 5，假設 $(x+1)f(x)$ 除以 $(x-1)(x+2)$ 的餘式為 $ax+b$，則數對 $(a, b)=$ (⑬ , ⑭) 。

B. 據報導某實驗室發現一種新細菌，此種細菌每經過一天後，細菌的數量會增加為原來的 r 倍。已知從一開始經過 3 天後細菌數為 4000 個，接著再經過 3 天後細菌數為 256000 個。若以這樣的速度繁殖，則從一開始經過 ⑮⑯ 天後，細菌個數開始超過 10^8 個。

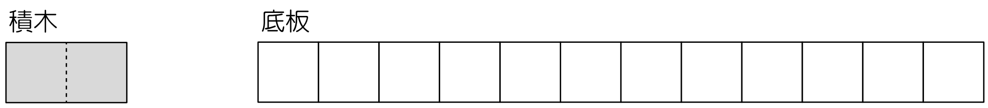
C. 已知 $a \geq b > 1$，求 $\log_b\left(\frac{b^5}{a}\right)+\log_a\left(\frac{a^4}{b}\right)$ 的最大值為 ⑰ 。

D. 甲、乙、丙、丁、戊五人參加歌唱比賽，評審團三位評審在賽後講評時透露了以下訊息：
評審 A：「甲不是最差的。」
評審 B：「乙唱得比丙來的好些。」
評審 C：「冠軍不是乙、丁。」
試求在沒有名次相同，且符合評審講評的條件下，有 ⑱⑲ 種不同名次的排列情況。

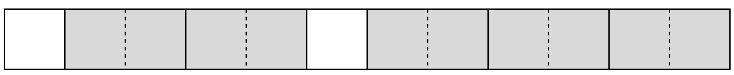
E. 估算$(0.98)^{10}$的近似值到小數點後第三位 ⑳.㉑㉒㉓ 。(四捨五入取到小數點後第三位)

F. 袋子裡共有 15 顆球，其中有 ②、④、⑥、⑧、⑩ 五種號碼，每一種號碼各有三顆球。假設每一顆球被拿到的機率相等，今從袋中取出三顆球。已知此三顆球的號碼和為 12，求此三顆球的號碼都是④的機率為 $\dfrac{㉔}{㉕㉖}$ 。(化為最簡分數)

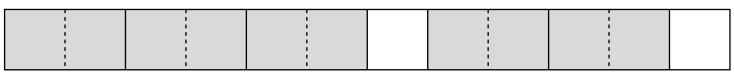
G. 翔翔手上有許多塊規格為 1×2 的長方形積木，想要拼裝在一個規格為 1×12 的底板上。



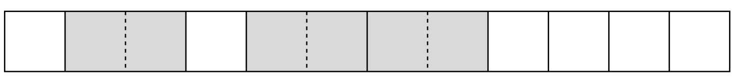
若規定積木只能拼在底板上(不能疊高)，不能超出底板範圍，積木與積木之間可緊鄰或恰間隔一個空位。翔翔將每一塊積木放置後，便不再移動位置，直到無法再放置任何積木為止。例如圖㈠、圖㈡為其中 2 種可能的積木擺放方式；而圖㈢因尚有空位能放置積木，故為不合之情況。



圖㈠



圖㈡



圖㈢

則翔翔共有 ㉗㉘ 種不同的排列方法。（註：無須考慮旋轉、翻轉的情形）

H. 臺灣地震頻繁，發生地震等意外時，在大樓林立的都會區，其樓層疏散路線及相關措施相當重要。今有一高樓，調查其中某些樓層 x(單位：樓)與該樓層的逃生時間 y(單位：秒)之相關統計數據整理如下：

$\sum_{i=1}^{8} x_i = 80$ ，$\sum_{i=1}^{8} y_i = 2400$ ，x 的標準差 $\sigma_x = 6$，y 的標準差 $\sigma_y = 120$，

x、y 的相關係數 $r = 0.9$

由整理數據可推估，平均每增加一樓層，其逃生時間平均會增加 ㉙㉚ 秒。

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S_n=\dfrac{n[2a+(n-1)d]}{2}$

   首項為 a，公比為 $r\ (r\neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 一維數據 X：x_1，x_2，……，x_n，算術平均數 $\mu_X=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

   標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}\right)-n\mu_X^{\,2}\right)}$

3. 二維數據 (X,Y)：(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，……，(x_n,y_n)，

   相關係數 $r_{XY}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

   迴歸直線(最適合直線)方程式為 $y-\mu_Y=r_{XY}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

4. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$，$\sqrt{5}\approx 2.236$，$\sqrt{6}\approx 2.449$，$\pi\approx 3.142$
5. 對數值：$\log_{10}2\approx 0.3010$，$\log_{10}3\approx 0.4771$，$\log_{10}5\approx 0.6990$，$\log_{10}7\approx 0.8451$