臺北區 105 學年度第一學期
第二次學科能力測驗模擬考試

數學考科

—作答注意事項—

考試範圍：第一～四冊全

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 5 題，多選題 8 題，選填題第 A 至 G 題共 7 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記，請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 3 與第 19 列的 8 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
19	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$ ，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 − 與第 21 列的 7 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
21	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

祝考試順利

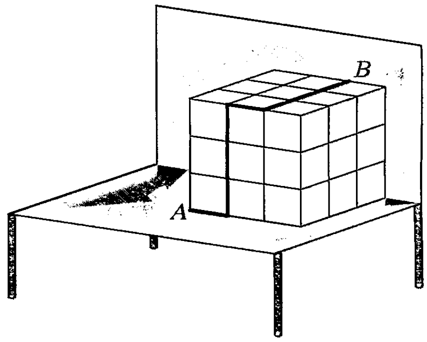
99363203-25

第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、單選題（占 25 分）

說明：第 1 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 右圖是一顆 3×3 的魔術方塊，也就是在一個正立方體中，每一面均有九個大小相等的正方形。現將其中一面緊靠在牆面，並靜置在桌面上(如右圖所示)，試求一隻螞蟻沿著分格線或稜線，從 A 點走捷徑到 B 點，有幾種不同的走法？(舉例說明：圖中粗線即為滿足條件之一條路徑。)



   (1) 28 種
   (2) 56 種
   (3) 74 種
   (4) 110 種
   (5) 138 種

2. 若 $f(x , y)=(x-1)^2+(y+1)^2+(x-2y+1)^2$，試求此函數的最小值為下列何者？
   (1) $\dfrac{10}{3}$
   (2) $\dfrac{8}{3}$
   (3) 1
   (4) 2
   (5) 3

3. 坐標平面上有一個正六邊形，其頂點以順時針方向依序為 $ABCDEF$。已知 F 點的坐標為 $(0 , 5)$，O 點為原點，且 A、B 皆在坐標軸上。則 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AO}=$？
   (1) 5
   (2) $5\sqrt{3}$
   (3) $\dfrac{25}{3}$
   (4) $\dfrac{25}{3}\sqrt{3}$
   (5) 25

4. 已知一圓 C：$(x-1)^2+(y-2)^2=10$，平面上一點 $A(4,2)$，直線 L 通過 A 點且與 x 軸正向的交角為 60°，若直線 L 與圓 C 交於 P、Q 兩點，求 $\overline{AP}\times\overline{AQ}=$？

(1) $\frac{1}{4}$

(2) $\frac{1}{2}$

(3) 1

(4) $\frac{3}{2}$

(5) $\frac{5}{4}$

5. 考慮矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$，其中 a，b，c 為實數且行列式值 $\det(A)=\frac{1}{2}$，求 $\det(A-A^{-1})=$？

(1) $\frac{1}{8}$

(2) $\frac{1}{4}$

(3) $\frac{1}{2}$

(4) $\frac{9}{2}$

(5) $\frac{9}{4}$

二、多選題（占 40 分）

說明：第 6 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

6. 設 $f(x)$ 為一實係數四次多項式，$i=\sqrt{-1}$，已知 $f(i+1)=0$ 且不等式 $f(x)<0$ 的解為 $-2<x<3$，則下列選項哪些是正確的？

(1) $f(i-1)=0$

(2) 若 a、b 為任意實數，且 $f(a+bi)=2$，則 $f(a-bi)=-2$

(3) 不等式 $f(2x)>0$ 的解為 $x<-1$ 或 $x>\frac{3}{2}$

(4) $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸交於相異兩點

(5) $y=(x+2)f(x)$ 的圖形與 x 軸有三個交點

7. 已知自然數 a、b 滿足 $\log_3 a=20$ 且 $\log_3 b=16$，則下列選項哪些是正確的？

(1)自然數 $a+b$ 必為 41 之倍數

(2)自然數 a 的個位數字與 b 相同

(3)自然數 $a+b$ 為 9 位正整數

(4)自然數 $a+b$ 展開後之末兩位數字為 22

(5)若定義實數 $A=n+\alpha$，其中 n 為整數且 $0\leq\alpha<1$，則稱 α 為實數 A 之小數部分，由此定義得 $\log_3(a^4+b^5)$之小數部分與 $\log_3 162$ 之小數部分相等

8. 阿松申辦提款卡時，依銀行規定須自訂 4 個阿拉伯數字排成一組密碼。某天阿松欲提款時發現他忘了正確密碼，只記得是由奇數 1，3，5，7，9 中取出相異四個數字排列而成，現若依此隨機輸入號碼，試問下列選項哪些是正確的？

(1)他第一次就猜對的機率為 $\dfrac{1}{120}$

(2)提款機設定當輸入的密碼錯誤達三次時，會沒收該提款卡，阿松嘗試輸入不同密碼，則他的提款卡會被沒收的機率為 $\dfrac{39}{40}$

承上述條件，若有一種智慧型提款機，每次輸入數字後會給提示，提示的口訣為「$mAnB$」，其中 mA 表示輸入的數字當中有 m 個不但中了而且數字是在正確的位置，nB 表示輸入的數字當中有 n 個中了但是數字的位置不正確。例如：密碼為 7135，若輸入 3159，則提示為「$1A2B$」。假使能善用提示，試問下列選項哪些是正確的？

(3)在第一次輸入就猜到「$1A3B$」的機率為 $\dfrac{1}{15}$

(4)他在第一次猜到「$1A3B$」的條件下，第二次猜到「$4A0B$」的機率為 $\dfrac{1}{8}$

(5)他在第一次猜到「$1A3B$」且在第二次猜到「$4A0B$」的機率為 $\dfrac{1}{120}$

9. 若變數 X(身高)的算術平均數為 μ_x，標準差為 σ_x；而變數 Y(體重)的算術平均數為 μ_y，標準差為 σ_y；且變數 X 與變數 Y 的相關係數為 r_{xy}，而 Y 對 X 的最佳迴歸直線為 $y=a+bx$。現將變數做線性轉換 $P=-2X+1$，$Q=Y-3$，則下列選項哪些是正確的？
(1)變數 P 的算術平均數 $\mu_p=-2\mu_x+1$
(2)變數 P 的標準差 $\sigma_p=-2\sigma_x$
(3)變數 P 與變數 Q 的相關係數 $r_{pq}=-r_{xy}$
(4) Q 對 P 的迴歸直線方程式必過點$(-2\mu_x+1, \mu_y-3)$
(5) Q 對 P 的迴歸直線方程式的斜率為$-\dfrac{b}{2}$

10. 若空間中向量 $\overrightarrow{a}=(1, 2, -2)$，$\overrightarrow{b}=(2, m, n)$，$\overrightarrow{c}=(2, -1, 0)$，滿足 $|\overrightarrow{b}|=3\sqrt{5}$ 且 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}=45$，則下列選項哪些是正確的？
(1) $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\,/\!/\,\overrightarrow{c}$
(2) $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$
(3) $m=4$
(4) $n=5$
(5) $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c})+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$

11. 已知空間中三點 $A(2, 2, 1)$、$B(1, 3, -1)$、$C(1, 1, -1)$，若在空間中與 A、B、C 三點等距離的所有點所形成的圖形為 Γ，則下列選項哪些是正確的？
(1) $\Gamma: x-y+2z+1=0$
(2) $\Gamma: \begin{cases} x=1-2t \\ y=2 \\ z=t \end{cases}$，$t\in R$
(3) Γ 中最接近原點的點為$\left(\dfrac{1}{5}, 2, \dfrac{2}{5}\right)$
(4) Γ 中與原點最接近的距離為$\sqrt{\dfrac{21}{5}}$
(5)$\triangle ABC$ 的面積為$\sqrt{5}$

12. 設 A、B、C 為矩陣，I 為單位方陣。下列有關矩陣的敘述哪些是正確的？
(1)若 $AB=BA$，則矩陣 A、B 皆為方陣
(2)若 $AC=BC$，且 $\det(C)\neq 0$，則 $A=B$
(3)若 $A^2=I$，則 $A=I$ 或 $A=-I$
(4)若 $AB=BA$，則 $AB^{10}=B^5AB^5=B^{10}A$
(5)若 AB 有乘法反元素，則 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

13. 若方程式$(x^2+y^2-4x)(y^2-x-7)=0$ 之圖形與直線 L：$mx-y+4-2m=0$ 有四個相異的交點，請問符合的 m 值可能為下列哪些？
(1) -2
(2) -1
(3) 0
(4) 1
(5) 2

第貳部分：選填題（占 35 分）

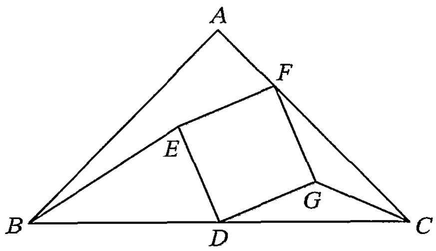
說明：1.第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(14－34)。
2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 若有一群人，任意取完 2 本相同書籍的方法數超過 1000 種，試問這一群人至少有 ⑭⑮ 個人。

B. 已知 a 為整數，若平面上三直線 L_1：$x+2y=a+2$，L_2：$2x+3y=-a-4$，L_3：$3x+(-a+1)y=-1$ 共交點，求序組$(x, y, a)=$ (⑯ , ⑰⑱ , ⑲⑳) 。

C. 已知$\triangle ABC$ 中，$\angle A=120°$，D 為 $\angle A$ 的內角平分線與 $\overline{BC}$ 的交點，M 為 $\overline{BC}$ 的中點，若 $\overline{AB}=6$，$\overline{AD}=4$，求 $\overline{AM}=$ ㉑$\sqrt{㉒}$ 。(化為最簡根式)

D. 如右圖，等腰直角$\triangle ABC$中，$\angle A=90°$，D為 $\overline{BC}$ 的中點，四邊形 $DEFG$ 為正方形，且點 F 在 $\overline{AC}$ 邊上。若 $\overline{BE}=\sqrt{3}\,\overline{CG}$，$\overline{BC}=4$，則正方形 $DEFG$ 的面積為 ㉓$-$㉔$\sqrt{㉕}$ 。(化為最簡根式)



E. 設圓 C：$x^2+y^2-x-y=0$ 及直線 L：$x+y-4=0$，若 P 為圓 C 上之動點，O 為坐標平面上的原點，連接 $\overleftrightarrow{OP}$，且令 $\overleftrightarrow{OP}$ 與直線 L 之交點為 Q，可得 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 為定值 k，則 $k=$ ㉖ 。

F. 滿足遞迴式 $\begin{cases}F_1=1,F_2=1\\F_{n+2}=F_{n+1}+F_n\end{cases}$ (n 為自然數)的數列 $\langle F_n\rangle$ 稱為 *Fibonacci Sequence*，若以矩陣的方式來表現為 $\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_n\\F_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_{n+1}\\F_{n+2}\end{bmatrix}$。若 $\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}^8=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，且 $a+b+c+d=F_n$，試求數對 $(a,n)=$ (㉗㉘ , ㉙㉚) 。

G. 有一橢圓形的公園，其中心有一噴水池，距噴水池南北各 $10\sqrt{3}$ 公尺處各有一涼亭，公園的邊界上任一點到兩涼亭的距離和均相等，現過涼亭闢一東西向的小徑，而小徑與公園邊界的交點處與噴水池之間鋪一直線健康按摩步道，若東西向的小徑與健康按摩步道的夾角為 $60°$，則噴水池到公園最南端的距離為 ㉛$+$㉜$\sqrt{㉝㉞}$ 公尺。(化為最簡根式)

參考公式及可能用到的數值

1. 平面上兩點 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 間的距離為 $\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
2. 二項式定理：$(x+y)^n=C_0^n x^n+C_1^n x^{n-1}y+C_2^n x^{n-2}y^2+\cdots\cdots+C_{n-1}^n xy^{n-1}+C_n^n y^n$
3. 三角函數的倍角公式：

   $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

   $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$

   $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

   $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

   $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$
4. 三角函數的和角公式：

   $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

   $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

   $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$
5. $\triangle ABC$ 的面積$=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}bc\sin A$
6. $\triangle ABC$ 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ (R 為$\triangle ABC$ 外接圓半徑)
7. $\triangle ABC$ 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$
8. 向量 $\overrightarrow{u}$ 與向量 $\overrightarrow{v}$ 的內積為 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\cos\theta$，其中 θ 為 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 的夾角
9. $\overrightarrow{u}=(a_1, b_1, c_1)$ 與 $\overrightarrow{v}=(a_2, b_2, c_2)$ 的外積為 $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)$
10. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$，$\sqrt{5}\approx 2.236$，$\sqrt{6}\approx 2.449$，$\pi\approx 3.142$
11. 對數值：$\log_{10}2\approx 0.3010$，$\log_{10}3\approx 0.4771$，$\log_{10}5\approx 0.6990$，$\log_{10}7\approx 0.8451$

請各位考生務必注意！

數學考科

第壹部分　　單選題　　第 3 題 更改如下：

3. 坐標平面上有一個正六邊形，其頂點以順時針方向依序為 $ABCDEF$。已知 F 點的坐標為 $(0,5)$，O 點為原點，且 A、B 皆在坐標軸上。則 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AO}=$？

↓

『坐標』改成『x』

(1) 5
(2) $5\sqrt{3}$
(3) $\dfrac{25}{3}$
(4) $\dfrac{25}{3}\sqrt{3}$
(5) 25