

臺中市立高級中等學校

106 學年度學科能力測驗第一次聯合複習考試

考試日期：106 年 11 月 2~3 日

數學考科

— 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 7 題，選填題第 A 至 G 題共 7 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{18}{19}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生必須

分別在答案卡上的第 18 列的 \square^3 與第 19 列的 \square^8 畫記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{20 \textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案

卡的第 20 列的 \square^{-} 與第 21 列的 \square^7 畫記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

※ 試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題（占65分）

一、單選題（占30分）

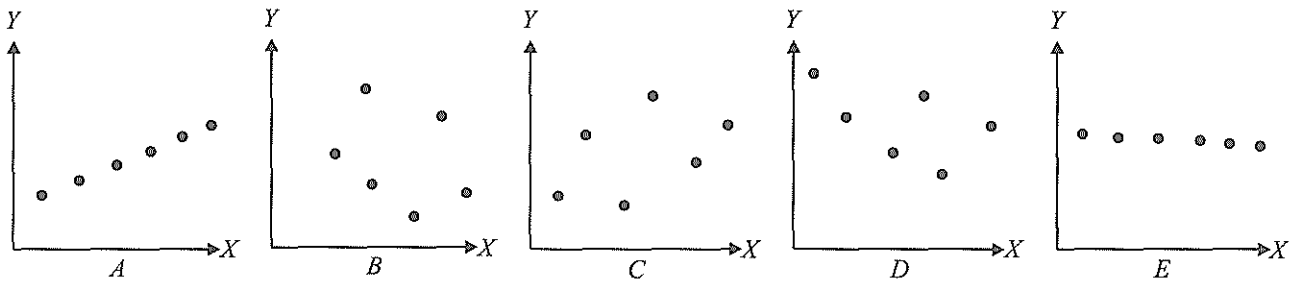
說明：第1題至第6題，每題有5個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得5分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設 $f(x)=4x^4-5$ 、 $g(x)=x^2-3$ ，若有一實數 c ，使 $f(c)+g(c)=c$ ，則下列哪一個選項是正確的？
 - (1) $0 < c < 1$
 - (2) $-1 < c < 0$
 - (3) $-2 < c < -1$
 - (4) $-3 < c < -2$
 - (5) $-4 < c < -3$

2. 設 $a = \log_{1.2} 1.3$ 、 $b = \log_{12} 13$ 、 $c = \log_{120} 130$ ，則 a 、 b 、 c 之大小順序為何？
 - (1) $c > b > a$
 - (2) $b > c > a$
 - (3) $b > a > c$
 - (4) $a > b > c$
 - (5) $a > c > b$

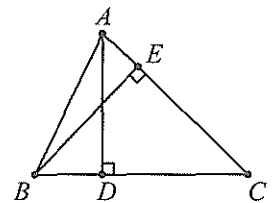
3. 有一試驗，其第一次成功的機率為 p ，若第 k 次成功，則第 $k+1$ 次成功的機率為 $1-p$ ；第 k 次失敗，則第 $k+1$ 次成功的機率為 p 。已知在第三次成功的條件下，第一次成功的機率為 $\frac{2}{3}$ ，則 p 在下列哪一個範圍之中？
 - (1) $0 < p < 0.2$
 - (2) $0.2 < p < 0.4$
 - (3) $0.4 < p < 0.6$
 - (4) $0.6 < p < 0.8$
 - (5) $0.8 < p < 1$

4. 下列各圖為不同的資料 Y 對 X 的散布圖形，哪一個圖形中 X 與 Y 的相關係數最接近 0.5？



- (1) A
- (2) B
- (3) C
- (4) D
- (5) E

5. 如圖(1)，在銳角三角形 ABC 中， \overline{AD} 、 \overline{BE} 分別為 \overline{BC} 、 \overline{AC} 邊上的高。若四邊形 $ABDE$ 的面積為三角形 ABC 的面積的 k 倍，則 k 值為下列何者？



圖(1)

- (1) $\sin C$
- (2) $\cos C$
- (3) $\tan C$
- (4) $\sin^2 C$
- (5) $\cos^2 C$

6. 設坐標平面上二點 $A(2, 0)$ 、 $B(-2, 0)$ ，已知點 P 滿足 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} < 0$ ，則點 P 可能在下列哪一個圖形上？

- (1) $y = x^2 + 2$
- (2) $|x| + |y| = 3$
- (3) $y = 2^x - 2$
- (4) $y = \log_2(x - 2)$
- (5) $x^2 + y^2 = 5$

二、多選題 (占 35 分)

說明：第 7 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇 (填) 題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 下列式子中的所有變數 a 、 b 、 c 皆為實數，且每一項運算結果皆為實數。則下列哪些選項的式子可以推得所有變數 a 、 b 、 c 均相同？

(1) $a+b=2\sqrt{ab}$

(2) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

(3) $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=0$

(4) $\sqrt{a-1}+\sqrt{b^2-1}+\sqrt{c^3-1}\leq 0$

(5) $a^3-3a^2+a-3=0$ ， $b^3-3b^2+b-3=0$ ， $c^3-3c^2+c-3=0$

8. 設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ ($a_n\neq 0$) 為實係數 n 次多項式，若 $1+i$ 為 $f(x)=x^2$ 之一根，則下列選項哪些是正確的？

(1) 若 a 與 b 皆為實數，且在 a 、 b 之間有實數 x 使得 $f(x)=0$ ，則 $f(a)\cdot f(b)<0$

(2) 若 $f(2+\sqrt{3})=0$ ，則 $f(2-\sqrt{3})=0$

(3) 若 $f(x)$ 有 $px+q$ 的因式，且 p 、 q 為互質的整數，則 p 為 a_n 的因數且 q 為 a_0 的因數

(4) $f(1-i)=-2i$

(5) $f(2i)=-4$

9. 下列哪些方程式恰有兩個相異實根？

(1) $2^{x-2017}-x^2=0$

(2) $\log_{1.2}x-x=0$

(3) $2\log_2|x|-x=0$

(4) $x^2+\log_2|x|+2=0$

(5) $2^{|x|}-|\log_2x|=0$

10. 設一數列 $\langle a_n \rangle$ ，其前 n 項和 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = n^2 + 3n + 1$ ， n 為正整數，則下列選項哪些是正確的？

(1) $a_1 = 4$

(2) $a_n = 2n + 2$

(3) $\langle a_n \rangle$ 是一個等差數列

(4) $\sum_{k=1}^{20} a_{2k-1} = 841$

(5) $\sum_{k=1}^{28} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{7}{60}$

11. 媽媽每天到好高級蔬果店購買食材，家中固定只買以下蔬菜和水果：

蔬菜：胡蘿蔔、小白菜、玉米、南瓜、馬鈴薯、花椰菜這六種。

水果：香蕉、鳳梨、水梨、葡萄這四種。

若家中星期六、日都買外食，星期一到星期五都自己做飯，而做飯的這幾天之中，每天都使用三種不同的蔬菜，以及兩種不同的飯後水果，則下列各敘述哪些是正確的？

(以下都指一天的使用與否，不討論三餐的使用情形。另外，每個星期一的選擇不受到上一個星期五選擇的影響。)

(1) 若每天使用的蔬菜和水果都沒有限制，則一週 5 天使用蔬菜和水果可能的組合超過 10^{10} 種

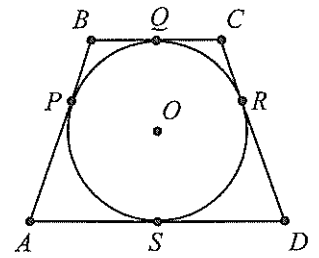
(2) 若每天使用的蔬菜最多只有 1 種和前一天相同，則一週 5 天使用蔬菜可能的組合為 180000 種

(3) 若每天使用的水果最多只有 1 種和前一天相同，則一週 5 天使用水果可能的組合為 3750 種

(4) 若每天使用的蔬菜和水果合計都恰有 3 種和前一天相同，則一週 5 天使用蔬菜和水果可能的組合超過 10^{10} 種

(5) 若每天使用的蔬菜和水果都和前一天完全不相同，則一週 5 天使用蔬菜和水果可能的組合少於 150 種

12. 如圖(2)，一圓內切於等腰梯形 $ABCD$ 中， P 、 Q 、 R 、 S 為切點， O 為圓心。已知 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 。請選出正確的選項。



圖(2)

- (1) $\overline{AD} = 2\overline{BC}$
- (2) $\angle A > 60^\circ$
- (3) $4(\overline{AB} \cdot \overline{AO}) = 3(\overline{AD} \cdot \overline{AO})$
- (4) 若圓半徑為 1，則 $\overline{AP} \cdot \overline{AD} = \frac{4}{3}$
- (5) $\overline{AO} = \frac{4}{5}\overline{AB} + \frac{3}{5}\overline{AD}$

13. 設圓 $C : x^2 + y^2 + 4x - 6y + a = 0$ 及圓外一點 $P(-1, -4)$ 。已知通過點 P 且與圓 C 相切之兩條直線 L_1 與 L_2 互相垂直，且直線 L_1 的斜率為正。請選出正確的選項。

- (1) 圓心坐標為 $(2, -3)$
- (2) 圓 C 半徑為 $\sqrt{5}$
- (3) $a = -12$
- (4) 直線 L_1 的斜率為 $\frac{4}{3}$
- (5) 圓 C 上與直線 L_2 之距離為正整數的點共有 20 個

第貳部分：選填題（占 35 分）

說明：1. 第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（14-35）。

2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 設二次方程式 $x^2 - 4x - 11 = 0$ 的兩個實根為 α 、 β ，則對任意實數 x ， $|x - \alpha| + |x - \beta|$ 的最小值為 $\underline{14}\sqrt{\underline{15}\underline{16}}$ 。(化為最簡根式)

B. 不透明箱內有編號分別為 1 至 9 的九個球，每次隨機取出一個，記錄其編號後放回箱內；以 P_n 表示前 n 次取球的編號之總和為偶數的機率。則使 $|P_n - \frac{1}{2}| < 10^{-12}$ 成立的最小自然數 $n = \underline{\textcircled{17}\textcircled{18}}$ 。

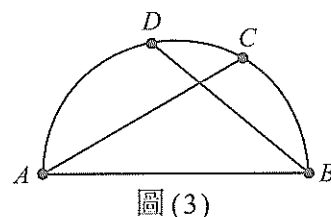
C. 實係數方程式 $f(x) = x^4 + (k-2)x^3 - (k-8)x^2 + ax + b = 0$ 有實根，也有複數根。已知 $1+2i$ 為其一根，將 a 、 b 以 k 表示，則 ab 的最小值為 $\textcircled{19}\textcircled{20}\textcircled{21}$ 。

D. 袋中有相同大小的 6 顆球，分別標上 1、3、5、7、9、11 號，現進行取球遊戲，規則為：若取到 n 號球，則將其放回，再放入一顆相同大小，標上 $n+1$ 號的球，再次進行取球。則第三次取到 8 號球的機率為 $\frac{\textcircled{22}\textcircled{23}}{\textcircled{24}\textcircled{25}\textcircled{26}}$ 。(化成最簡分數)

E. 實數 a 、 b 滿足 $3a^2 + 4b^2 = 25$ 。三角形 OPQ 之三頂點坐標分別為 $O(0,0)$ 、 $P(3a,106)$ 、 $Q(2b,2017)$ ，設三角形 OPQ 的重心 G 點坐標為 (m,n) ，則 $m+n$ 之最大值為 $\textcircled{27}\textcircled{28}\textcircled{29}$ 。

F. 設 $a > 0$ ，已知 (x,y) 滿足 $\begin{cases} ax+by \geq 0 \\ x+2y \leq 25 \\ y \geq 6 \end{cases}$ ，且二元一次式 $f(x,y) = 2x+9y+k$ 在 $(x,y) = (-5,15)$ 時有最大值為 120，則二元一次式 $f(x,y)$ 的最小值為 $\textcircled{30}\textcircled{31}$ 。

G. 如圖(3)，在以 \overline{AB} 為直徑的半圓上取 C 、 D 兩點，使得 \widehat{AD} 弧長為 \widehat{CD} 弧長的 2 倍，已知 $\overline{AB} = 50$ ， $\overline{BD} = 40$ ，則 $\overline{AC} = \underline{\textcircled{32}\textcircled{33}\sqrt{\textcircled{34}\textcircled{35}}}$ 。
(化為最簡根式)



參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 $r (r \neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

4. 三角函數的三倍角公式： $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

5. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

$$\text{標準差 } \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\mu_X^2 \right)}$$

6. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，相關係數 $r_{(X,Y)} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

迴歸直線(最適合直線)方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

7. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$

8. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$