

臺中市立高級中等學校

106 學年度學科能力測驗第二次聯合複習考試

考試日期：106 年 12 月 18~19 日

數學考科

— 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 6 題，選填題第 A 至 H 題共 8 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{18}{19}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生必須

分別在答案卡上的第 18 列的 $\frac{3}{19}$ 與第 19 列的 $\frac{8}{8}$ 畫記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{20^{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案

卡的第 20 列的 $\frac{-}{50}$ 與第 21 列的 $\frac{7}{50}$ 畫記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

※ 試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題（占60分）

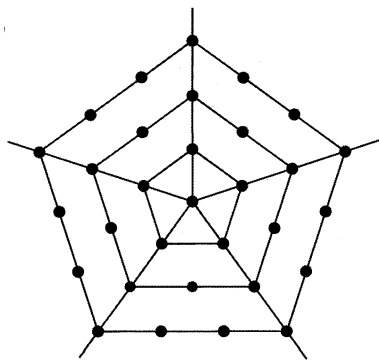
一、單選題（占30分）

說明：第1題至第6題，每題有5個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得5分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

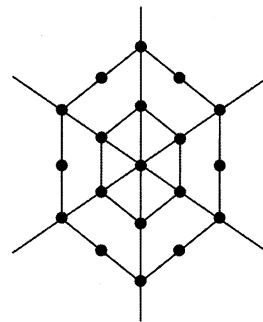
1. 圍棋的棋盤是長寬皆19格的正方形，每個格子都可能有三種狀態：黑子、白子、空位，因此有 3^{361} 種結果，稱為「可能結果」。但考慮圍棋的規則，電腦科學家 John Tromp 在2016年計算出只會有 $2 \cdot 10^{170}$ 種結果，稱為「有效結果」。問「可能結果」約為「有效結果」的幾倍？

- (1) 10
- (2) 50
- (3) 100
- (4) 500
- (5) 1000

2. 圖(1)是五軸四層的蜘蛛網，共有31個點；圖(2)是六軸三層的蜘蛛網，共有19個點。按照此規律，請問十二軸七層的蜘蛛網上共有幾個點？



圖(1)



圖(2)

- (1) 252
- (2) 253
- (3) 336
- (4) 337
- (5) 84

3. 城都地區的傳說寶可夢降臨！寶可夢公司有新活動，將於 9、10、11 月於各大洲陸續推出水君、雷公、炎帝。公司想了解水君、雷公、炎帝這三隻神獸，哪一隻神獸是寶可夢訓練家所喜歡的，於是調查了 350 個寶可夢訓練家，得到的資訊如下：

- ① 三種神獸都不喜歡的有 46 人。
- ② 喜歡雷公的人中，有 $\frac{1}{3}$ 的人喜歡炎帝但不喜歡水君。
- ③ 只喜歡水君的有 98 人。
- ④ 三種神獸都喜歡的有 14 人。
- ⑤ 喜歡炎帝的有 184 人。
- ⑥ 同時喜歡水君和炎帝的有 56 人。
- ⑦ 喜歡不只一種神獸的有 82 人。

試問“只喜歡”雷公的有多少人？

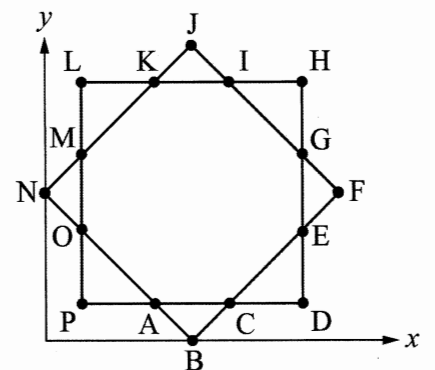
- (1) 14 人
- (2) 22 人
- (3) 33 人
- (4) 54 人
- (5) 60 人

4. 兩數列 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ ，已知 $a_n = 2 - \frac{n-1}{2} \cdot \log_{10} 5$ 以及 $b_n = 8 \cdot 100^{a_n}$ ，且 $\sum_{n=1}^{10} b_n$ 介於整數 m 及

$m+1$ 之間，則 m 之值為下列哪一個選項？

- (1) 9998
- (2) 9999
- (3) 99998
- (4) 99999
- (5) 999998

5. 一線性規劃問題的可行解區域為坐標平面上由兩個中心相同的正方形 $BFJN$ 與 $DHLP$ 及其內部共同組成的圖形，其中 $\overline{IH} = \overline{HG} = \overline{GE} = \overline{ED} = 1$ 且 \overline{LH} 平行 x 軸，如圖(3)。已知目標函數 $ax - by + 1$ (其中 a, b 為實數) 的最大值只發生在 H 點。請問當目標函數改為 $2 + bx + ay$ 時，最大值會發生在哪一點？



圖(3)

- (1) B
- (2) D
- (3) F
- (4) L
- (5) N

6. 擲一個公正的正四面體骰子(四面的點數分別為1,2,3,4)三次。設第一次擲出的點數為 a ，第二次擲出的點數為 b ，第三次擲出的點數為 c ，試問有多少種情形使 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & 1 \end{vmatrix} = 0$ ？
- (1) 20
 - (2) 16
 - (3) 12
 - (4) 9
 - (5) 8

二、多選題 (占 30 分)

說明：第 7 題至第 12 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇 (填) 題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 下列各方程式中，請選出有實數解的選項：
- (1) $|x-2|+|x+3|=4$
 - (2) $|x-2|+|x+3|=6$
 - (3) $|x-2|-|x+3|=-6$
 - (4) $|x-2|-|x+3|=2$
 - (5) $|x-2|-|x+3|=-4$
8. A 、 B 兩隊在 7 戰 4 勝的比賽中，假設某隊已經贏 ω 場，輸 ℓ 場，則此隊下一場贏的機率為 $\frac{\omega+1}{\ell+\omega+2}$ ，則：
- (1) 設 A 隊已經贏 3 場輸 2 場，則下一場 A 隊獲勝的機率為 $\frac{4}{7}$
 - (2) 兩隊打完平手的情形下，下一場贏的機率兩隊皆為 $\frac{1}{3}$
 - (3) A 隊 4 : 0 獲勝的機率為 $\frac{1}{5}$
 - (4) 比完 5 場後， A 隊 3 勝 2 負的機率為 $\frac{4}{7}$
 - (5) 要打到第 7 場才決勝負的機率為 $\frac{1}{7}$

9. 下列各直線中，請選出和 x 軸互為歪斜線的選項。

$$(1) L_1 : \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$(2) L_2 : \begin{cases} x+z=1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$(3) L_3 : \begin{cases} x=0 \\ y+z=1 \end{cases}$$

$$(4) L_4 : \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

$$(5) L_5 : \begin{cases} y=1 \\ z=1 \end{cases}$$

10. 坐標平面上有兩圖形 $\Gamma_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\Gamma_2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 其中 a, b 為相異正實數, $a > b$ 。

設 $\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, 試問下列選項何者正確?

(1) 對任意實數 m , 若直線 $L : y = mx$, 則 L 和 Ω 恰有 2 個交點

(2) 對任意實數 k , 若直線 $M : bx + ay = k$, 則 M 和 Ω 不會有 4 個交點

(3) 若 Γ_1 與 Γ_2 的焦點到原點的距離分別為 c_1, c_2 , 則 c_1^2, a^2, c_2^2 為等差數列

(4) 若直線 $y = k$, k 為實數, 在第一象限分別交 Γ_1 與 Γ_2 於 $P(x_p, k)$, $Q(x_q, k)$, 則

$$x_p^2 + x_q^2 = a^2$$

(5) Γ_1 與 Γ_2 交 4 點

11. 若 A, B 均為二階轉移矩陣, 請問下列何者選項是正確的?

(1) $AB = BA$

(2) A^{-1} 一定存在

(3) 對任意一個 2×1 階的機率向量 X_0 , 當 n 逐漸增大時, $A^n X_0$ 會趨於穩定狀態

(4) $\frac{A^2 + B}{2}$ 也是轉移矩陣

(5) $A^2 B^3$ 是轉移矩陣

12. 多項式 $f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 4$ ，其中 a, b 為自然數，下列選項何者正確？

- (1) $f(x) = 0$ 必有實根
- (2) $f(x) = 0$ 必有正的有理根
- (3) $y = f(x)$ 圖形交 x 軸於 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ 相異三點， α, β, γ 中必有無理數
- (4) $f(x) = x$ 必有實根
- (5) 若 k 為正實數，則 $f(x) = k$ 必有正實根

第貳部分：選填題（占40分）

說明：1. 第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（13-39）。
2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 設 k 為一整數，若方程式 $kx^2 + 7x + 1 = 0$ 有兩個相異實根，且兩根的乘積介於 $\frac{5}{71}$ 與 $\frac{6}{71}$ 之間，則 k 之值為 ⑬⑭。

B. 已知一數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式為 $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n, n \geq 1 \end{cases}$ ，則此數列前六項的標準差為 $\sqrt{⑮⑯⑰}$

C. 丟一個公正骰子，出現 1、2 點則丟一個銅板，出現 3 點則丟二個銅板，出現 4、5、6 點則丟三個銅板，試問在所丟的銅板沒有正面的情形下，骰子為出現 1 或 2 點的機率是 $\frac{⑱}{⑲⑳}$ 。

D. 有一組二維數據如下表所示：

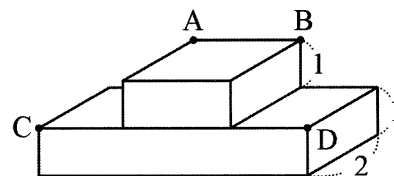
x	8	9	10	11	12	13
y	11	12	10	8	9	12

請從這六筆資料當中去掉一筆資料，使得 x 與 y 的相關係數最小，此時 y 對 x 的迴歸直

線為 $y = mx + k$ ，則數對 $(m, k) = (\frac{\textcircled{21}\textcircled{22}}{\textcircled{23}}, \textcircled{24}\textcircled{25})$ 。

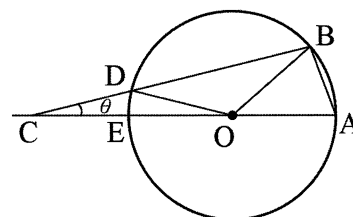
E. 坐標平面上，有一圓 $C: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$ 和一直線 $L: \begin{cases} x = t + k \\ y = 2t \end{cases}$ ， t 為實數。已知圓 C 與直線 L 交於一點，則可能的 k 值總和為 $\textcircled{26}$ 。

F. 如圖(4)，有一個小長方體放在大長方體上方正中央的位置。已知兩長方體的高均為 1，寬均為 2，且大長方體的長為 7。若 \vec{AC} 和 \vec{BD} 的夾角為 θ ，且 $\cos \theta = \frac{2}{3}$ ，則小長方體的長為 $\textcircled{27}$ 。



圖(4)

G. 如圖(5)，已知 O 為圓心，圓的半徑為 4， $\overline{CD} = \overline{OA}$ ，且 $\cos \theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ，則 \overline{AB}^2 為 $\textcircled{28}\textcircled{29} - \textcircled{30}\sqrt{\textcircled{31}\textcircled{32}}$ 。
(化成最簡根式)

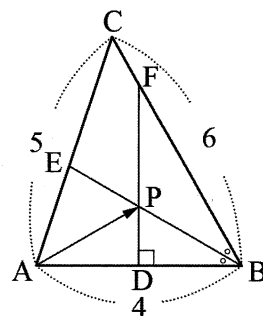


圖(5)

H. 如圖(6)，已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=4$ ， $\overline{BC}=6$ ， $\overline{AC}=5$ ，且 \overline{BE} 為 $\angle ABC$ 之角平分線， \overline{DF} 為 \overline{AB} 之中垂線。設 \overline{BE} 交 \overline{DF} 於 P 點，

若 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，則數對 $(x, y) = \left(\frac{\textcircled{33}}{\textcircled{34}\textcircled{35}}, \frac{\textcircled{36}\textcircled{37}}{\textcircled{38}\textcircled{39}} \right)$ 。

(化為最簡分數)



圖(6)

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 $r (r \neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

4. 三角函數的三倍角公式： $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$

$$\sin 3\theta = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta$$

5. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

$$\text{標準差 } \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\mu_X^2)}$$

6. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，相關係數 $r_{(X, Y)} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

迴歸直線(最適合直線)方程式 $y - \mu_Y = r_{X, Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

7. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$

8. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$