

# 全國公私立高級中學

## 105 學年度學科能力測驗第二次聯合模擬考試

考試日期：105 年 9 月 5~6 日

### 數學考科

#### — 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 7 題，選填題第 A 至 G 題共 7 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是  $\frac{18}{19}$ ，而依題意計算出來的答案是  $\frac{3}{8}$ ，則考生必須

分別在答案卡上的第 18 列的  $\frac{3}{19}$  與第 19 列的  $\frac{8}{8}$  畫記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 C 題的答案格式是  $\frac{20 \textcircled{21}}{50}$ ，而答案是  $\frac{-7}{50}$  時，則考生必須分別在答案

卡的第 20 列的  $\frac{-}{50}$  與第 21 列的  $\frac{7}{7}$  畫記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

※ 試題後附有參考公式及可能用到的數值

## 第壹部分：選擇題（占 65 分）

### 一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

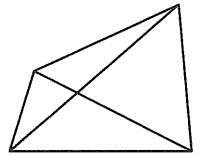
1. 蟋蟀是會隨著周遭溫度改變體溫的變溫動物，當溫度升高時，蟋蟀翅膀的摩擦速度會變快，所以固定時間內的鳴叫次數也會增加。科學家發現，將蟋蟀 13.5 秒內鳴叫的次數，加上 41 所得的數字，就是目前的華氏溫度，即  $f(t)=13.5t+41$ ，其中  $t$  為蟋蟀每秒鳴叫的次數， $f(t)$  為目前的華氏溫度。例如： $t=2$  時， $f(2)=13.5\times 2+41=68$ ，即當蟋蟀每秒鳴叫 2 次時的華氏溫度為 68 度。若另有一個函數  $g(t)=at+b$ ，其中  $t$  為蟋蟀每秒鳴叫的次數， $g(t)$  為目前的攝氏溫度。請問  $a+b$  之值為下列哪一選項？（已知攝氏溫度  $=(\text{華氏溫度}-32)\times\frac{5}{9}$ ）
- (1) 12.5  
(2) 13.5  
(3) 14.5  
(4) 15.5  
(5) 16.5
2. 設  $f(x)=x^4-22x^2+36x+40$ ，且  $f(3-i)=0$ ，請問滿足  $f(x)<0$  的整數解有幾個？
- (1) 3 個  
(2) 4 個  
(3) 5 個  
(4) 6 個  
(5) 7 個
3. 若  $a+\log_3 5$ 、 $a+\log_9 5$ 、 $a+\log_{27} 5$  三數成等比，則公比為下列哪一選項？
- (1)  $\frac{1}{2}$   
(2)  $\frac{1}{3}$   
(3) 1  
(4) 2  
(5) 3

4. 若  $S_n = 1 + (1+2) + (1+2+2^2) + \cdots + (1+2+\cdots+2^n)$ 。則  $S_{10}$  之值為下列哪一選項？

- (1) 4073
- (2) 4077
- (3) 4080
- (4) 4083
- (5) 4086

5. 使用 3 種不同的顏色塗圖(1)，每區塊只能塗一色，規定相鄰區塊必須異色，且 3 種顏色都必須使用。求所有塗色的方法數有幾種？

- (1) 6
- (2) 12
- (3) 18
- (4) 24
- (5) 27



圖(1)

6. 已知有一組二維數據  $(x_i, y_i)$ ， $i=1, 2, \dots, n$ 。滿足  $\mu_X = 12$ ， $\mu_Y = 8$ ， $\sigma_X = 3$ ， $\sigma_Y = 5$ 。若此二維數據的迴歸直線方程式為  $y - \mu_Y = m(x - \mu_X)$ ，則斜率  $m$  的範圍為下列哪一選項？

- (1)  $-1 \leq m \leq 1$
- (2)  $-3 \leq m \leq 3$
- (3)  $-5 \leq m \leq 5$
- (4)  $-\frac{3}{5} \leq m \leq \frac{3}{5}$
- (5)  $-\frac{5}{3} \leq m \leq \frac{5}{3}$

## 二、多選題 (占 35 分)

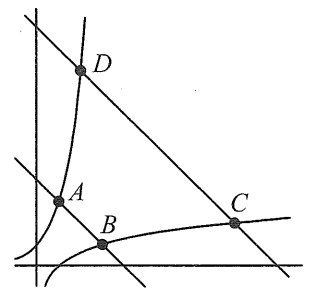
說明：第 7 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇 (填) 題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 設  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 、 $e$  皆為正整數，多項式  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 26$ ， $g(x) = x^4 + cx^3 + dx^2 + ex + 65$ 。若  $\alpha$ 、 $\beta$  為兩相異整數，滿足  $f(\alpha) = f(\beta) = g(\alpha) = g(\beta) = 0$ 。請選出正確的選項。

- (1)  $f(x) = 0$  恰有 3 個整數解
- (2)  $g(x) = 0$  恰有 2 個整數解
- (3)  $g(x) = 0$  恰有 4 個整數解
- (4)  $\alpha + \beta = -14$
- (5)  $a = 16$

8. 如圖(2)，四個函數  $y = 3^x$ ， $y = \log_3 x$ ， $y = 4 - x$ ， $y = 11 - x$  的圖形分別交於  $A, B, C, D$  四點。請選出正確的選項。

- (1) 四邊形  $ABCD$  是等腰梯形
- (2) 四邊形  $ABCD$  恰有一條對稱軸  $x + y = 0$
- (3) 四邊形  $ABCD$  的周長為  $9\sqrt{2} + 12$
- (4) 四邊形  $ABCD$  的面積為  $\frac{63}{2}$
- (5) 若  $m_{\overline{AB}}$  表示  $A, B$  兩點的斜率，則  $m_{\overline{AD}} \times m_{\overline{BC}} = 1$



圖(2)

9. 將 8 個不同的獎品，依下列各種情況分配：

第一種情形：平分成四堆，共有  $a$  種分配方法。

第二種情形：平分給甲、乙、丙、丁四人，共有  $b$  種分配方法。

第三種情形：依 4 個、2 個、2 個分成三堆，共有  $c$  種分配方法。

第四種情形：依甲分到 4 個，乙、丙二人各分得 2 個，共有  $d$  種分配方法。

第五種情形：分給甲、乙、丙三人，只知道其中一人得 4 個，另二人各得 2 個，共有  $e$  種分配方法。

請選出正確的選項。

(1)  $a = 630$

(2)  $b = 24a$

(3)  $c = 210$

(4)  $d = 2c$

(5)  $e = 3c$

10. 有 4 張紅色紙牌，6 張白色紙牌，任意疊成一堆。今從上到下逐一取牌，設取到第  $k$  張牌時恰為第 4 張紅色牌的機率為  $P_k$ 。請選出正確的選項。

(1)  $P_3 = 0$

(2)  $P_4 = \frac{1}{210}$

(3)  $P_{10} = \frac{2}{5}$

(4)  $\sum_{k=4}^7 P_k = \frac{1}{3}$

(5)  $\sum_{k=1}^{10} P_k = 1$

11. 設  $A$ 、 $B$  為樣本空間  $S$  中的事件， $A'$ 、 $B'$  為餘事件，且  $P(A) = \frac{1}{3}$ ， $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ 。請選出正確的選項。

(1) 若  $A$ 、 $B$  為獨立事件，則  $P(B) = \frac{5}{12}$

(2) 若  $A$ 、 $B$  為獨立事件，則  $P(A|B) = \frac{1}{3}$

(3) 若  $A$ 、 $B$  為獨立事件，則  $P(B|A) = \frac{5}{8}$

(4) 若  $A$ 、 $B$  為互斥事件，則  $P(B) = \frac{5}{12}$

(5) 若  $A$ 、 $B$  為互斥事件，則  $P(B'|A) = 1$

12. 表(1)是小靜在 8 年級至 12 年級間，每學年數學成績與英文成績的成績統計：  
請根據這張表選出正確的選項。

表(1)

年級(X)	數學成績(Y)	英文成績(Z)
8	85	93
9	80	93
10	79	84
11	77	80
12	79	82

- (1) 兩變量  $X$ 、 $Y$  的相關係數為  $-\frac{\sqrt{10}}{4}$
- (2) 將兩變量  $X$ 、 $Y$  標準化後得到新的變量  $X'$ 、 $Y'$ ，則  $X'$ 、 $Y'$  的相關係數比  $X$ 、 $Y$  的相關係數大
- (3)  $Y$ 、 $Z$  的相關係數與  $Z$ 、 $Y$  的相關係數相同
- (4) 兩變量  $Y$ 、 $Z$  為負相關
- (5) 由表(1)可知小靜的數學學習一直在退步
13. 關於下列各實數數列。請選出正確的選項。
- (1) 數列  $\langle a_n \rangle$  之前  $n$  項的和  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 3n^2 - 5$ ，則  $\langle a_n \rangle$  為等差數列
- (2) 數列  $\langle b_n \rangle$  之前  $n$  項的和  $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = n^2 + 2n$ ，則  $\langle b_n \rangle$  為等差數列
- (3) 數列  $\langle c_n \rangle$  滿足  $c_1 = \sqrt{2}$  且  $c_{n+1} = 2^n \cdot c_n$ ， $n$  為正整數，則  $c_n = 2^{\frac{n^2-n+1}{2}}$
- (4) 數列  $\langle d_n \rangle$  滿足  $d_1 = 3$  且  $d_{n+1} = d_n + (3n+2)$ ， $n$  為正整數，則  $d_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$
- (5) 數列  $\langle e_n \rangle$  滿足  $e_1 = 3$  且  $e_{n+1} = \frac{1}{2}e_n + 3$ ， $n$  為正整數，則  $e_n = 4 - \frac{1}{2^{n-1}}$

## 第貳部分：選填題 (占 35 分)

說明：1. 第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(14-29)。

2. 每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 在數線上有四個點  $A(11)$ 、 $B(12)$ 、 $C(90)$ 、 $D(91)$ ，若點  $P(x)$  到  $A$ 、 $B$  兩點的距離和與點  $P(x)$  到  $C$ 、 $D$  兩點的距離和相等，即  $|x-11|+|x-12|=|x-90|+|x-91|$ ，則  $x$  之值為 1415。

- B. 已知  $x = \sqrt{2} + 1$ ，則  $\log_{\frac{1}{4}}(x^4 - x^3 - 2x^2 - 3x + 7)$  之值為  $\frac{\textcircled{16}\textcircled{17}}{\textcircled{18}}$ 。(化成最簡分數)

- C. 小冠買了一台最大只能計算到 50 位數的計算機。一日小冠閒來無事，用計算機去算 6 的  $n$  次連乘積，即  $6^n$  的值， $n$  為正整數。在計算機能計算的前提下(即  $6^n < 10^{50}$ )，求  $n$  的最大值為 1920。
- D. 已知  $a$  為實數，高斯符號  $[a]$  表示不大於  $a$  的最大整數，例如： $[2.3]=2$ ， $[4]=4$ 。則  $\sum_{k=1}^{105} [\sqrt{k}] =$  212223。
- E. NBA 總冠軍戰採 7 戰 4 勝制(先獲得 4 場勝利者，即為總冠軍)。今有詹詹隊與柯柯隊爭奪總冠軍。已知兩隊實力相當，且前一戰勝負，不會影響下一戰的勝負。若比賽到第 7 戰才產生總冠軍隊，小亞猜測兩隊在前 4 戰的戰績各為 2 勝 2 敗，請問小亞猜對的機率為  $\frac{\textcircled{24}}{\textcircled{25}}$ 。(化成最簡分數)
- F. 已知  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為實數且這 3 個數的算術平均數為  $\mu$ ，標準差為  $\sigma$ 。若加入 11、13、13、19 這 4 個數之後， $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、11、13、13、19 這 7 個數的算術平均數亦為  $\mu$ ，標準差亦為  $\sigma$ ，則  $\mu + \sigma =$  2627。
- G. 已知  $a_1, a_2, a_3 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ ，且  $a_1 \neq 0$ ，設  $a_1a_2a_3$  為一個三位數，我們可以定義這個三位數  $a_1a_2a_3$  的長度為  $\|a_1a_2a_3\| = |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3|$ ，例如：385 的長度為  $\|385\| = |3 - 8| + |8 - 5| = 8$ ，則滿足  $\|a_1a_2a_3\| = 2$  的三位數共有 2829 個。

### 參考公式及可能用到的數值

1. 首項為  $a$ ，公差為  $d$  的等差數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為  $a$ ，公比為  $r$  ( $r \neq 1$ ) 的等比數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 一維數據  $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，算術平均數  $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

標準差  $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\mu_X^2 \right)}$

3. 二維數據  $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，相關係數  $r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

迴歸直線(最適合直線)方程式  $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

4. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$

5. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$

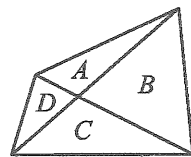


1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	3	2	4	2	5	145	145	234	1235	2345	13	234	5	1
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	
-	3	2	6	4	6	7	5	3	5	1	7	6	2	

第壹部分：選擇題

一、單選題

- 假設蟋蟀每秒鳴叫  $t$  次，華氏溫度 =  $13.5t + 41$   
攝氏溫度 =  $((13.5t + 41) - 32) \times \frac{5}{9} = 7.5t + 5$   
所以  $a + b = 7.5 + 5 = 12.5$ ，故選(1)
- 因為  $x = 3 - i \Rightarrow x - 3 = -i \Rightarrow (x - 3)^2 = (-i)^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 10 = 0$   
所以  $f(x) = x^4 - 22x^2 + 36x + 40 = (x^2 - 6x + 10)(x^2 + 6x + 4)$   
 $= (x^2 - 6x + 10)[x - (-3 + \sqrt{5})][x - (-3 - \sqrt{5})]$   
所以  $f(x) < 0$  的解為  $-3 - \sqrt{5} < x < -3 + \sqrt{5}$   
 $f(x) < 0$  的整數解為  $-5, -4, -3, -2, -1$ ，共 5 個，故選(3)
- 我們可以簡化式子，令  $\log_3 5 = k$   
故原題可改成  $a + k, a + \frac{k}{2}, a + \frac{k}{3}$  三數成等比  
 $\Rightarrow (a + \frac{k}{2})^2 = (a + k)(a + \frac{k}{3}) \Rightarrow a^2 + ak + \frac{k^2}{4} = a^2 + \frac{4}{3}ak + \frac{k^2}{3}$   
 $\Rightarrow -\frac{k^2}{12} = \frac{1}{3}ak \Rightarrow k = -4a$ ，公比 =  $\frac{a + \frac{k}{2}}{a + k} = \frac{-a}{-3a} = \frac{1}{3}$ ，故選(2)
- 由等比級數公式  $1 + 2 + \dots + 2^n = \frac{1(2^{n+1} - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$   
所以  $S_{10} = 1 + (1+2) + (1+2+4) + \dots + (1+2+\dots+2^{10})$   
 $= (2-1) + (2^2-1) + (2^3-1) + \dots + (2^{11}-1)$   
 $= (2+2^2+2^3+\dots+2^{11}) - 11 = (2^{12} - 2) - 11 = 4083$ ，故選(4)
- 因為 3 種顏色都必須使用，所以恰有兩個區塊同色，又因為相鄰區塊必須異色，所以我們討論  
① AC 同色， $3 \times 1 \times 2 \times 1 = 6$  (種)  
ACBD  
② BD 同色， $3 \times 1 \times 2 \times 1 = 6$  (種)  
BDAC  
共有 12 種塗法，故選(2)
- 由迴歸直線方程式的公式可知斜率  $m = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$   
且  $-1 \leq r_{X,Y} \leq 1$ ，所以  $-\frac{5}{3} \leq m \leq \frac{5}{3}$ ，故選(5)



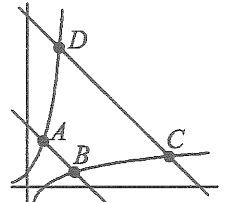
二、多選題

- 由牛頓定理可知  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 26 = 0$  的整數解可能為  $\pm 1, \pm 2, \pm 13, \pm 26$   
 $g(x) = x^4 + cx^3 + dx^2 + ex + 65 = 0$  的整數解可能為  $\pm 1, \pm 5, \pm 13, \pm 65$   
且兩多項式的係數皆為正整數，所以  $\alpha, \beta$  之值為  $-1, -13$   
所以  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 26 = (x+1)(x+13)(x+k)$   
比較常數項，可得  $k = 2$   
 $f(x) = (x+1)(x+13)(x+2) = x^3 + 16x^2 + 41x + 26$   
同理， $g(x) = x^4 + cx^3 + dx^2 + ex + 65$   
 $= (x+1)(x+13)(x^2 + mx + 5)$

因為  $c, d, e$  之值未定，所以  $m$  之值可以為任意正整數  
所以  $x^2 + mx + 5 = 0$  可能有實數解，也可能為虛根  
故選(1)(4)(5)

- 如下圖，可解得四個點坐標為  
 $A(1, 3), B(3, 1), C(9, 2), D(2, 9)$

因為函數  $y = 3^x, y = \log_3 x$   
對稱於直線  $y = x$   
且直線  $y = 4 - x, y = 11 - x$   
亦與直線  $y = x$  垂直  
所以四邊形 ABCD 是等腰梯形



$m_{\overline{AD}} \times m_{\overline{BC}} = 1$   
四邊形 ABCD 的周長為  
 $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 2\sqrt{2} + \sqrt{37} + 7\sqrt{2} + \sqrt{37} = 9\sqrt{2} + 2\sqrt{37}$   
四邊形 ABCD 的面積為

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 9 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (1+6+81+6-9-9-4-9) = \frac{63}{2}$$

[另解] 直線  $y = 4 - x, y = 11 - x$  的距離為  $\frac{7}{\sqrt{2}}$

四邊形 ABCD 的面積 =  $(\overline{AB} + \overline{CD}) \times \frac{7}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$   
 $= 9\sqrt{2} \times \frac{7}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{63}{2}$ ，故選(1)(4)(5)

- (1)  $a = \frac{C_2^8 C_2^6 C_2^4 C_2^2}{4!} = 105$   
(2)  $b = \frac{C_2^8 C_2^6 C_2^4 C_2^2}{4!} \times 4! = 24a$   
(3)  $c = \frac{C_4^8 C_2^4 C_2^2}{2!} = 210$   
(4)  $d = \frac{C_4^8 C_2^4 C_2^2}{2!} \times 1 \times 2! = 2c$   
(5)  $e = \frac{C_4^8 C_2^4 C_2^2}{2!} \times 3! = 6c$

故選(2)(3)(4)

- 依題意  $P_1 = P_2 = P_3 = 0$

$$P_k = \frac{C_3^{k-1}}{C_4^{10}} = \frac{4(k-1)(k-2)(k-3)}{10 \times 9 \times 8 \times 7}, k \geq 4$$

所以， $P_4 = \frac{1}{210}, P_{10} = \frac{2}{5}$

$$\sum_{k=4}^7 P_k = \frac{C_3^3 + C_3^4 + C_3^5 + C_3^6}{C_4^{10}} = \frac{C_4^7}{C_4^{10}} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{10 \times 9 \times 8 \times 7} = \frac{1}{6}$$

$$\sum_{k=4}^{10} P_k = \frac{C_3^3 + C_3^4 + \dots + C_3^9}{C_4^{10}} = \frac{C_4^{10}}{C_4^{10}} = 1$$

故選(1)(2)(3)(5)

- 若 A、B 為獨立事件，則  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot P(B)$

(1) 因為  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{3}P(B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{5}{8}$$

(2)(3) 因為  $A$ 、 $B$  獨立

$$P(A|B) = P(A) = \frac{1}{3}, P(B|A) = P(B) = \frac{5}{8}$$

若  $A$ 、 $B$  為互斥事件，則  $P(A \cap B) = 0$

$$(4) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{1}{3} + P(B) - 0 \Rightarrow P(B) = \frac{5}{12}$$

$$(5) P(B'|A) = \frac{P(A \cap B')}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

故選(2)(3)(4)(5)

$$12. \mu_X = \frac{8+9+10+11+12}{5} = 10, \mu_Y = \frac{85+80+79+77+79}{5} = 80$$

(1)  $r =$

$$\frac{(8-10)(85-80) + (9-10)(80-80) + (10-10)(79-80) + (11-10)(77-80) + (12-10)(79-80)}{\sqrt{(8-10)^2 + (9-10)^2 + (10-10)^2 + (11-10)^2 + (12-10)^2} \sqrt{(85-80)^2 + (80-80)^2 + (79-80)^2 + (77-80)^2 + (79-80)^2}}$$

$$= \frac{-10+0+0-3-2}{\sqrt{4+1+0+1+4} \sqrt{25+0+1+9+1}} = \frac{-\sqrt{10}}{4}$$

(2)  $X$ 、 $Y$  標準化後，相關係數不變

(3) 由相關係數公式可知  $Y$ 、 $Z$  的相關係數與  $Z$ 、 $Y$  的相關係數相同

(4) 由表可知兩變量  $Y$ 、 $Z$  為正相關

(5) 因為沒有全體學生的成績可以比較，故無法判斷小靜在數學學習上是否退步

故選(1)(3)

$$13. (1) \text{ 當 } n=1 \text{ 時, } a_1 = S_1 = 3 \cdot 1^2 - 5 = -2$$

$$\text{當 } n \geq 2 \text{ 時, } a_n = S_n - S_{n-1} = (3n^2 - 5) - (3(n-1)^2 - 5) = 6n - 3$$

所以  $\{a_n\}$  不是一個等差數列

由第二項開始  $\{a_n\}$  才是一個等差數列

$$(2) \text{ 當 } n=1 \text{ 時, } b_1 = S_1 = 1^2 + 2 = 3$$

$$\text{當 } n \geq 2 \text{ 時, } b_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (n^2 + 2n) - [(n-1)^2 + 2(n-1)] = 2n + 1$$

所以  $\{b_n\}$  是一個等差數列

$$(3) c_2 = 2^1 \cdot c_1$$

$$c_3 = 2^2 \cdot c_2$$

$\vdots$

$$\times) c_n = 2^{n-1} \cdot c_{n-1}$$

$$c_n = 2^1 \times 2^2 \times \cdots \times 2^{n-1} \cdot c_1 = 2^{1+2+\cdots+(n-1)} \cdot \sqrt{2}$$

$$= 2^{\frac{(n-1)n}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{n^2-n+1}{2}}$$

(4) 因為  $d_{n+1} = d_n + (3n+2)$

$$d_2 = d_1 + 3 \times 1 + 2$$

$$d_3 = d_2 + 3 \times 2 + 2$$

$\vdots$

$$+) d_n = d_{n-1} + 3 \times (n-1) + 2$$

$$d_n = d_1 + 3(1+2+\cdots+(n-1)) + 2(n-1) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$$

(5) 因為  $e_{n+1} = \frac{1}{2}e_n + 3 \cdots \cdots$  ①

$$e_n = \frac{1}{2}e_{n-1} + 3 \cdots \cdots$$
 ②

$$\text{①} - \text{②} \Rightarrow e_{n+1} - e_n = \frac{1}{2}(e_n - e_{n-1}), \text{ 又 } e_2 - e_1 = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$

表示數列  $\{e_{n+1} - e_n\}$  為首項  $\frac{3}{2}$ ，公比  $\frac{1}{2}$  的等比數列

$$\therefore e_n = e_1 + (e_2 - e_1) + (e_3 - e_2) + \cdots + (e_n - e_{n-1})$$

$$= 3 + \frac{3[1 - (\frac{1}{2})^{n-1}]}{1 - \frac{1}{2}} = 3 + 3[1 - (\frac{1}{2})^{n-1}]$$

$$= 3 + 3 - 3 \times (\frac{1}{2})^{n-1} = 3(2 - \frac{1}{2^{n-1}}) = 6(1 - \frac{1}{2^n})$$

故選(2)(3)(4)

## 第貳部分：選填題

A. 討論：①  $91 \leq x$ ， $|x-11| + |x-12| = |x-90| + |x-91|$

$$\Rightarrow (x-11) + (x-12) = (x-90) + (x-91)$$

$$\Rightarrow 2x - 23 = 2x - 181, \text{ 無解}$$

②  $90 \leq x < 91$ ， $|x-11| + |x-12| = |x-90| + |x-91|$

$$\Rightarrow (x-11) + (x-12) = (x-90) - (x-91)$$

$$\Rightarrow 2x - 23 = 1 \Rightarrow x = 12, \text{ 不合}$$

③  $12 \leq x < 90$ ， $|x-11| + |x-12| = |x-90| + |x-91|$

$$\Rightarrow (x-11) + (x-12) = -(x-90) - (x-91)$$

$$\Rightarrow 2x - 23 = -2x + 181 \Rightarrow x = 51$$

④  $11 \leq x < 12$ ， $|x-11| + |x-12| = |x-90| + |x-91|$

$$\Rightarrow (x-11) - (x-12) = -(x-90) - (x-91)$$

$$\Rightarrow 1 = -2x + 181 \Rightarrow x = 90, \text{ 不合}$$

⑤  $x < 11$ ， $|x-11| + |x-12| = |x-90| + |x-91|$

$$\Rightarrow -(x-11) - (x-12) = -(x-90) - (x-91)$$

$$\Rightarrow -2x + 23 = -2x + 181, \text{ 無解}$$

[另解] 由數線可知，點  $A(11)$ ， $C(90)$  與  $B(12)$ ， $D(91)$  均對稱於點  $M(51)$ ，所以當  $P(x)$  為點  $M(51)$  時， $P(x)$  到  $A$ 、 $B$  兩點的距離和與點  $P(x)$  到  $C$ 、 $D$  兩點的距離和相等。故  $x = 51$

$$B. \text{ 令 } x = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow (x-1)^2 = 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\text{因為 } x^4 - x^3 - 2x^2 - 3x + 7 = (x^2 - 2x - 1)(x^2 + x + 1) + 8$$

$$\text{所以當 } x = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^4 - x^3 - 2x^2 - 3x + 7 = (x^2 - 2x - 1)(x^2 + x + 1) + 8 = 8$$

$$\text{所求 } \log_{\frac{1}{4}}(x^4 - x^3 - 2x^2 - 3x + 7) = \log_{\frac{1}{4}} 8 = \log_{2^{-2}} 2^3 = \frac{-3}{2}$$

$$C. 6^n < 10^{50} \Rightarrow \log 6^n < \log 10^{50} \Rightarrow n \log 6 < 50 \Rightarrow n < \frac{50}{\log 2 + \log 3}$$

$$\Rightarrow n < \frac{50}{0.7781} \approx 64.26 \Rightarrow n \leq 64, \text{ 故 } n \text{ 的最大值為 } 64$$

D. 因為  $[\sqrt{n^2}] = [\sqrt{n^2+1}] = \cdots = [\sqrt{(n+1)^2-1}] = n$

且  $n^2, \dots, (n+1)^2 - 1$  共有  $2n+1$  項

$$\text{所以 } [\sqrt{n^2}] + [\sqrt{n^2+1}] + \cdots + [\sqrt{(n+1)^2-1}] = n \times (2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{105} [\sqrt{k}] = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + \cdots + [\sqrt{99}] + [\sqrt{100}] + \cdots + [\sqrt{105}]$$

$$= 1+1+1+2+\cdots+9+10+\cdots+10$$

$$= 1 \times 3 + 2 \times 5 + \cdots + 9 \times 19 + 10 \times 6$$

$$= (\sum_{k=1}^9 k(2k+1)) + 60 = (2 \sum_{k=1}^9 k^2 + \sum_{k=1}^9 k) + 60 = 675$$

E. 因為第 7 戰才產生總冠軍隊，所以前 6 戰兩隊的戰績各為 3

$$\text{勝 3 負, 小亞猜對的機率為 } \frac{C_2^4 \times 2!}{C_3^6} = \frac{3}{5}$$

$$F. \text{ 因為 } \mu = \frac{a+b+c}{3} = \frac{a+b+c+11+13+13+19}{7}$$

$$\Rightarrow 11+13+13+19 = 4\mu$$

$$\text{所以 } \mu = \frac{11+13+13+19}{4} = 14$$

$$\text{同理 } \sigma = \sqrt{\frac{(a-\mu)^2 + (b-\mu)^2 + (c-\mu)^2}{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a-\mu)^2 + (b-\mu)^2 + (c-\mu)^2 + (11-\mu)^2 + (13-\mu)^2 + (13-\mu)^2 + (19-\mu)^2}{7}}$$

$$\text{所以 } \sigma = \sqrt{\frac{(11-\mu)^2 + (13-\mu)^2 + (13-\mu)^2 + (19-\mu)^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{(11-14)^2 + (13-14)^2 + (13-14)^2 + (19-14)^2}{4}} = 3$$

故  $\mu + \sigma = 17$

G.  $\|a_1 a_2 a_3\| = |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| = 2$

①  $|a_1 - a_2| = 2, |a_2 - a_3| = 0$

$(a_1, a_2, a_3) = (1, 3, 3), (2, 4, 4) \cdots (7, 9, 9)$

$(2, 0, 0), (3, 1, 1) \cdots (9, 7, 7)$ , 共 15 個

②  $|a_1 - a_2| = 0, |a_2 - a_3| = 2$

$(a_1, a_2, a_3) = (1, 1, 3), (2, 2, 4) \cdots (7, 7, 9)$

$(2, 2, 0), (3, 3, 1) \cdots (9, 9, 7)$ , 共 15 個

③  $|a_1 - a_2| = 1, |a_2 - a_3| = 1$

$(a_1, a_2, a_3) = (1, 2, 3), (2, 3, 4) \cdots (7, 8, 9)$

$(2, 1, 0), (3, 2, 1) \cdots (9, 8, 7)$

$(1, 2, 1), (2, 3, 2) \cdots (8, 9, 8)$

$(1, 0, 1), (2, 1, 2) \cdots (9, 8, 9)$ , 共 32 個

由①②③可知共 62 個