臺中區國立高級中學 100 學年度
大學入學第一次學科能力測驗聯合模擬考

數學考科

試題編號：AU-3001
考試日期：100.11.03

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘
題型題數：單選題 6 題，多選題 6 題，選填題第 A 至 H 題共 8 題
作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上畫記，修正時應以橡皮擦拭，切勿使用修正液（帶）。
作答說明：在答案卡適當位置選出數值或符號。請仔細閱讀下面的例子。

（一）填答選擇題時，只用 1，2，3，4，5 等五個格子，而不需要用到 −，±，以及 6，7，8，9，0 等格子。

例：若第 1 題的選項為(1) 3 (2) 5 (3) 7 (4) 9 (5) 11，而正確的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第一列 $\overset{3}{□}$ 劃記（注意不是 7），如：

解答欄												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
1	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□

例：若多選題第 10 題的正確選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡的第 10 列的 $\overset{1}{□}$ 與 $\overset{3}{□}$ 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
10	■	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□

（二）選填題的題號是 A，B，C，⋯，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$，而答案是 $\dfrac{3}{8}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 18 列的 $\overset{3}{□}$ 與第 19 列的 $\overset{8}{□}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
19	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\overset{-}{□}$ 與第 21 列的 $\overset{7}{□}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
21	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

祝考試順利

第壹部分：選擇題（佔 60 分）

一、單選題（佔 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題 5 個選項，其中只有一個是最適當的答案，畫記在答案卡之「解答欄」。各題答對得 5 分；未作答、答錯或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

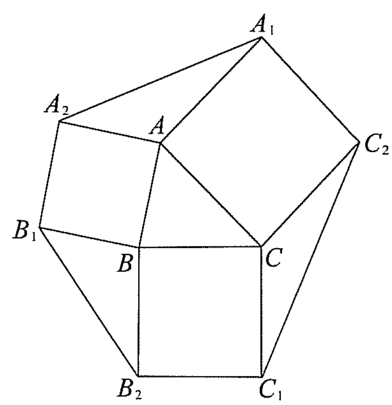
1. 設 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，則 $\log_8 \sin x+\log_8 \cos x$ 的最大值爲

(1) -3　(2) $-\dfrac{1}{3}$

(3) 0　(4) $\dfrac{1}{6}$

(5) $2\sqrt{2}$

2. $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CA}=7$，分別以 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 爲一邊向外作正方形 ABB_1A_2、BCC_1B_2、CAA_1C_2，如右圖。試問：$\triangle ABC$、$\triangle AA_1A_2$、$\triangle BB_1B_2$、$\triangle CC_1C_2$ 中，哪一個的面積最大？



(1) $\triangle ABC$　(2) $\triangle AA_1A_2$

(3) $\triangle BB_1B_2$　(4) $\triangle CC_1C_2$

(5)四個的面積都一樣大

3. 設 $\triangle ABC$ 是銳角三角形，則複數 $z=(\cos B-\sin A)+i(\sin B-\cos A)$ 在複數平面內所對應的點位於

(1)第一象限

(2)第二象限

(3)第三象限

(4)第四象限

(5)實數軸或虛數軸上

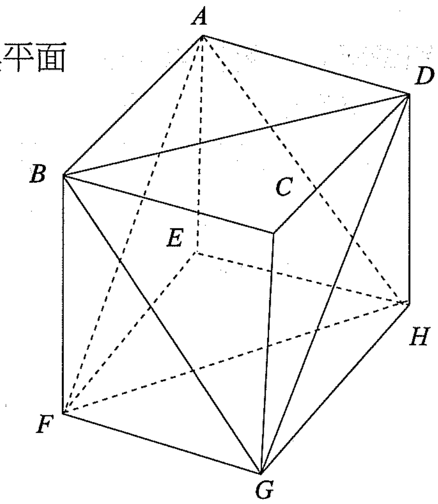
4. 平行四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於點 O，E 是 $\overline{OD}$ 的中點，$\overleftrightarrow{AE}$ 與 $\overline{CD}$ 交於點 F。若 $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BD}=\vec{b}$，則 $\overrightarrow{AF}=$

(1) $\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$　(2) $\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$

(3) $\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}$　(4) $\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$

(5) $\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$

5. 如右圖，正立方體 $ABCD-EFGH$ 中，點 C 至平面 BDG 與平面 AFH 的距離比為：



(1) $1:\sqrt{2}$

(2) $1:\dfrac{3}{2}$

(3) $1:\sqrt{3}$

(4) $1:2$

(5) $1:2\sqrt{2}$

6. 設 $x>y>1$ 且 $a=3^{\frac{x+y}{2}}$，$b=\log_3\dfrac{x+y}{2}$，$c=\dfrac{3^x+3^y}{2}$，$d=\dfrac{\log_3 x+\log_3 y}{2}$，$e=\sqrt{\log_3 x\cdot\log_3 y}$

則下列有關 a，b，c，d，e 的大小關係何者正確？

(1) $a>c>b>d>e$

(2) $a>c>b>e>d$

(3) $c>a>b>d>e$

(4) $c>a>b>e>d$

(5) $c>a>d>e>b$

二、多選題（30 分）

說明：第 7 題至第 12 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，選出正確選項畫記在答案卡之「解答欄」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以零分計算。

7. 設等比數列 $<a_n>$ 的每一項都是實數，已知 $a_2=1$，試問下列哪些選項**不可能**是 $a_1+a_2+a_3$ 的和？

(1) $-\sqrt{3}$　(2) -1

(3) $\dfrac{5}{2}$　(4) π

(5) 101

8. 已知坐標空間中二直線

$$L_1：\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{-1}$$

$$L_2：\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-4}{-2}$$

則下列敘述哪些是正確的？

(1)可找到一平面同時垂直L_1與L_2

(2)可找到一平面同時包含L_1與L_2

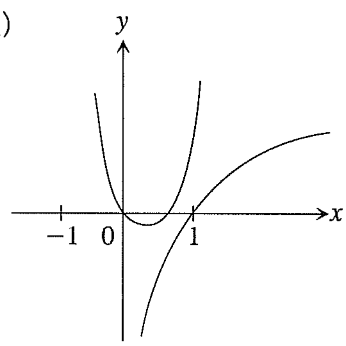
(3)可找到一平面包含L_1且與L_2平行

(4)可找到一平面包含L_1且與L_2垂直

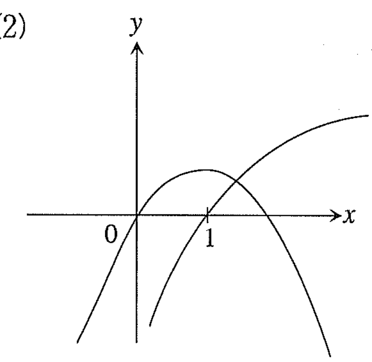
(5)可找到唯一直線同時與L_1、L_2垂直

9. 函數$y=ax^2+bx$與$y=\log_{|\frac{b}{a}|}x$（$ab\neq 0$，$|a|\neq|b|$）在同一直角坐標系中的圖形可能爲：

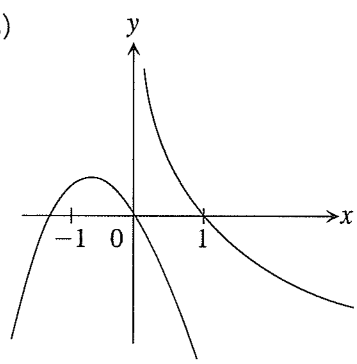
(1)



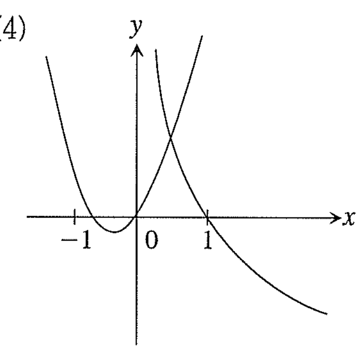
(2)



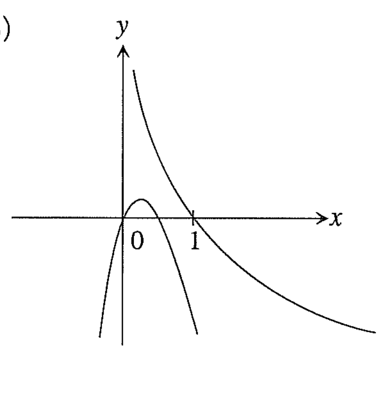
(3)



(4)



(5)



10. 設多項函數$f(x)=x^3+2x^2-x-1$，則下列各方程式中，哪些恰有三個相異實根？

(1)$f(2^x)=0$，$x\in R$

(2)$f(\log_3 x)=0$，$x\in R$

(3)$f(\sin x)=0$，$0\le x<2\pi$

(4)$f(\cos x)=0$，$0\le x<2\pi$

(5)$f(\tan x)=0$，$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$

11. 符號$\bar{z}$代表複數z的共軛複數，符號$|z|$代表複數z的絕對值。考慮複數平面上滿足$(z-1)(\bar{z}-1)=2$的複數z，下列哪些選項是正確的？

(1) $1-\sqrt{2}\,i$是一個可能的z

(2)所有可能的z構成的圖形為一圓

(3)z的實部與虛部可以同時為正整數

(4)當z為實數時，所有可能的z恰為一正數及一負數

(5) 2 是一個可能的$|z|$

12. 設a，b為實數，$f(x)=4x^3+ax^2+21x+5$，$g(x)=2x^3+bx^2+7x-15$，已知$f(x)$與$g(x)$的最高公因式為二次式，則下列哪些選項是正確的？

(1) $a>0$

(2) $b<0$

(3)函數$y=f(x)$與$y=g(x)$的圖形恰有三個相異交點

(4)方程式$(f(x))^2+(g(x))^2=0$沒有實根

(5)不等式$f(x)g(x)<0$的整數解恰有兩個

第貳部分、選填題（40 分）

說明：1.第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「解答欄」所標示的列號（13～31）。 2.每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 坐標平面上的圓C：$(x-8)^2+(y-9)^2=25$上有＿⑬⑭＿個點到直線L：$x+3y+5=0$的距離正好是整數值。

B. 設函數 $f(x)=\cos x$，$0\le x\le 2\pi$，則 $y=f(x)$ 的圖形與直線 $y=1$ 所圍成區域的面積爲 ⑮.⑯⑰ 。（計算到小數點後第二位，以下四捨五入。）

C. 設 S 爲等差數列 1，4，7，⋯，400 的各項相乘所得的數，已知 $10^n\,|\,S$，其中 n 爲正整數，則 n 的最大值爲 ⑱⑲ 。

D. $\triangle ABC$ 中，a，b，c 分別爲 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的對邊長，設 $(\sqrt{3}\,b-c)\cos A=a\cos C$，則 $\cos A=$ $\dfrac{\sqrt{⑳}}{㉑}$ 。

E. $\triangle ABC$ 中，D，E，F 分別在三邊 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CA}$ 上，且 $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{BE}:\overline{EC}=\overline{CF}:\overline{FA}=3:1$。已知 $D(2,4)$，$E(1,2)$，$F(5,-1)$，則 $\triangle ABC$ 的面積爲 $\dfrac{㉒㉓}{㉔}$ 。（化成最簡分數）

F. 已知過球面上三點 A，B，C 的截平面到球心的距離等於球半徑的一半，且 $\overline{BC}=5$，$\overline{CA}=8$，$\overline{AB}=7$，則球的半徑爲 $\dfrac{㉕㉖}{㉗}$ 。（化成最簡分數）

G. 觀察下列等式：

(1) $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$

(2) $\cos 4\theta=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$

(3) $\cos 6\theta=32\cos^6\theta-48\cos^4+18\cos^2\theta-1$

(4) $\cos 8\theta=128\cos^8\theta-256\cos^6\theta+160\cos^4\theta-32\cos^2\theta+1$

(5) $\cos 10\theta=a\cos^{10}\theta-1280\cos^8\theta+1120\cos^6\theta+b\cos^4\theta+c\cos^2\theta-1$

可以推得 $a+b-c$ 的值爲 ㉘㉙ 。

H. <u>那些年我們一起種的林場</u>年初原有樹木 200 萬棵，且數量以每年 12% 的增加率繼續成長，但每年年底要砍伐固定數量的樹木。若希望 15 年後樹木的數量能達到 300 萬棵以上，則每年年底砍伐樹木的最大數量爲 ㉚㉛ 萬棵。（未滿 1 萬棵不計）

參考公式及可能用到的數值

1. 一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的公式解：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
2. 平面上兩點 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 間的距離為 $\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
3. 通過 (x_1,y_1) 與 (x_2,y_2) 的直線斜率 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，$x_2\neq x_1$
4. 首項為 a 且公比為 r 的等比數列前 n 項之和 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$，$r\neq 1$
5. 三角函數的和角公式：$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

   $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$
6. $\triangle ABC$ 的正弦定理：$\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$

   $\triangle ABC$ 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$
7. 棣美弗定理：設 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，則 $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$，$n$ 為一正整數
8. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$；$\sqrt{3}\approx 1.732$；$\sqrt{5}\approx 2.236$；$\sqrt{6}\approx 2.449$；$\pi\approx 3.142$
9. 對數值：$\log_{10}2\approx 0.3010$，$\log_{10}3\approx 0.4771$，$\log_{10}5\approx 0.6990$，$\log_{10}7\approx 0.8451$
10. 常用對數表 $y=\log_{10}x$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	表尾差								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

臺中區國立高級中學 100 學年度
大學入學第一次學科能力測驗聯合模擬考
數學考科詳解

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 參考答案：(2)

試題解析：$\log_8 \sin x + \log_8 \cos x = \log_8 \sin x \cos x = \log_8 \frac{1}{2}\sin 2x$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$，$0 < 2x < \pi$，得 $0 < \sin 2x \leq 1$

當 $\sin 2x = 1$ 時，$\log_8 \frac{1}{2}\sin 2x$ 有最大值 $\log_8 \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$

即 $\log_8 \sin x + \log_8 \cos x$ 的最大值為 $-\frac{1}{3}$，故選(2)

2. 參考答案：(5)

試題解析：$\triangle AA_1A_2$ 面積 $= \frac{1}{2}\overline{AA_1} \cdot \overline{AA_2} \cdot \sin(180° - \angle BAC)$

$= \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{AB} \cdot \sin \angle BAC = \triangle ABC$ 面積

同理，$\triangle BB_1B_2$ 面積 $= \triangle CC_1C_2$ 面積 $= \triangle ABC$ 面積

$\triangle ABC$、$\triangle AA_1A_2$、$\triangle BB_1B_2$、$\triangle CC_1C_2$ 的面積都一樣大

故選(5)

3. 參考答案：(2)

試題解析：$\because\ \angle A + \angle B > \frac{\pi}{2}$

$\therefore\ 0 < \frac{\pi}{2} - \angle A < \angle B < \frac{\pi}{2}$

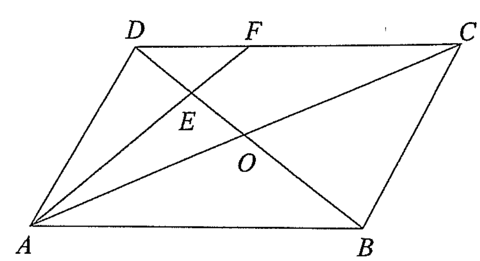
$\Rightarrow\ \cos B < \cos(\frac{\pi}{2} - \angle A) = \sin A$

$\sin B > \sin(\frac{\pi}{2} - \angle A) = \cos A$

$\Rightarrow\ \cos B - \sin A < 0$，$\sin B - \cos A > 0$

$\Rightarrow\ z$ 位於第二象限，故選(2)

4. 參考答案：(4)



試題解析：$\because\ \triangle DEF \sim \triangle BEA$

$\therefore\ \frac{\overline{DF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BE}} = \frac{1}{3}$

又 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

$\therefore\ \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}) + \frac{1}{3}(\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}) = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

故選(4)

5. 參考答案：(4)

試題解析：定坐標系使$E(0,0,0)$，$F(1,0,0)$，$H(0,1,0)$，$A(0,0,1)$

則$B(1,0,1)$，$C(1,1,1)$，$D(0,1,1)$，$G(1,1,0)$

$\Rightarrow$ 平面BDG：$x+y+z=2$

平面AFH：$x+y+z=1$

$\Rightarrow$ $d(C,\text{平面}BDG):d(C,\text{平面}AFH)$

$=\dfrac{1}{\sqrt{3}}:\dfrac{2}{\sqrt{3}}=1:2$

故選(4)

6. 參考答案：(3)

試題解析：$\because$ $x>y>1$ $\therefore$ $\log_3 x>\log_3 y>0$且$3^x>3^y>3$

$\Rightarrow$ $c=\dfrac{3^x+3^y}{2}>\sqrt{3^x\cdot 3^y}=3^{\frac{x+y}{2}}=a$

$b=\log_3\dfrac{x+y}{2}>\log_3\sqrt{xy}=\dfrac{\log_3 x+\log_3 y}{2}=d>\sqrt{\log_3 x\cdot\log_3 y}=e$

又$a=3^{\frac{x+y}{2}}>\log_3\dfrac{x+y}{2}=b$

$\Rightarrow$ $c>a>b>d>e$

故選(3)

二、多選題

7. 參考答案：(3)

試題解析：設等比數列$\langle a_n\rangle$的公比為r，則$a_1=\dfrac{1}{r}$，$a_3=r$，

故$a_1+a_2+a_3=\dfrac{1}{r}+1+r=1+r+\dfrac{1}{r}$

【方法一】

當$r>0$時，$1+r+\dfrac{1}{r}\geq 1+2\sqrt{r\cdot\dfrac{1}{r}}=3$

當$r<0$時，$1+r+\dfrac{1}{r}=1-(-r+\dfrac{1}{-r})\leq 1-2\sqrt{-r\cdot\dfrac{1}{-r}}=-1$

得$a_1+a_2+a_3\geq 3$或$a_1+a_2+a_3\leq -1$

故選(3)

【方法二】

令$1+r+\dfrac{1}{r}=S$，則$r^2+(1-S)r+1=0$

判別式$(1-S)^2-4\geq 0$，得$S\geq 3$或$S\leq -1$

即$a_1+a_2+a_3\geq 3$或$a_1+a_2+a_3\leq -1$

故選(3)

8. 參考答案：(3)(4)(5)

試題解析：設$\vec{u}_1=(2,-2,-1)$，$\vec{u}_2=(1,2,-2)$分別為L_1，L_2的方向向量

$\because$ $\vec{u}_1$不平行$\vec{u}_2$且L_1，L_2不相交

$\therefore$ L_1，L_2歪斜

(1)錯誤。不存在任何平面同時垂直L_1，L_2

(2)錯誤。不存在任何平面同時包含L_1，L_2

(3)正確。可找到一平面包含L_1且與L_2平行

(4)正確。$\because\ \vec{u}_1\cdot\vec{u}_2=2-4+2=0$

$\therefore\ \vec{u}_1\perp\vec{u}_2$

故可找到一平面包含L_1且與L_2垂直

(5)正確。L_1，L_2有唯一的公垂線

故選(3)(4)(5)

9. 參考答案：(2)(4)(5)

試題解析：設$y=ax^2+bx$與$y=\log_{|\frac{b}{a}|}x$的圖形分別爲Γ_1，Γ_2

則Γ_1與x軸交於原點與點$(-\dfrac{b}{a},0)$

(1)錯誤。由Γ_1知$0<-\dfrac{b}{a}<1$，但由Γ_2知$|\dfrac{b}{a}|>1$，矛盾。

(2)正確。由Γ_1知$-\dfrac{b}{a}>1$，由Γ_2知$|\dfrac{b}{a}|>1$，成立。

(3)錯誤。由Γ_1知$-\dfrac{b}{a}<-1$，由Γ_2知$0<|\dfrac{b}{a}|<1$，矛盾。

(4)正確。由Γ_1知$-1<-\dfrac{b}{a}<0$，由Γ_2知$0<|\dfrac{b}{a}|<1$，成立。

(5)正確。由Γ_1知$0<-\dfrac{b}{a}<1$，由Γ_2知$0<|\dfrac{b}{a}|<1$，成立。

故選(2)(4)(5)

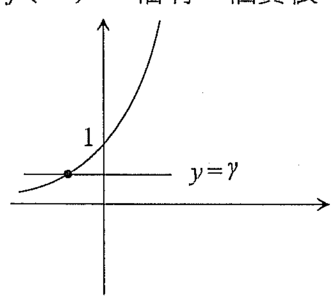
10. 參考答案：(2)(5)

試題解析：$\because$

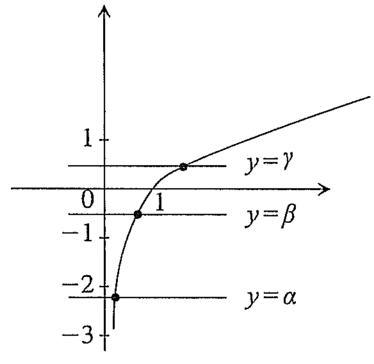
x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	-7	1	1	-1	1

$\therefore\ f(x)=0$有三個實根α、β、γ分別在區間$(-3,-2)$，$(-1,0)$，$(0,1)$內

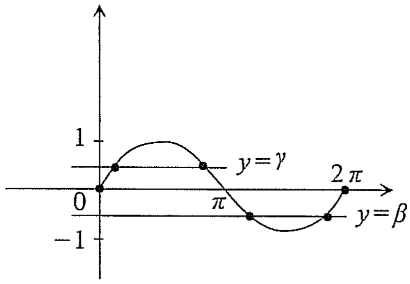
(1)錯誤。$f(2^x)=0$恰有一個實根。



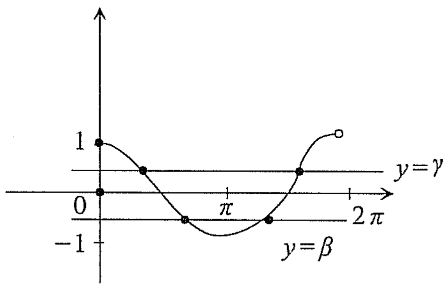
(2)正確。$f(\log_3 x)=0$恰有三個相異實根。



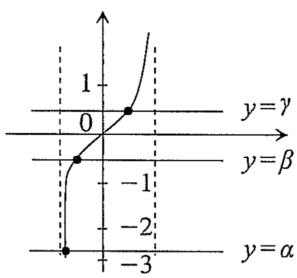
(3)錯誤。$f(\sin x)=0$，$0\le x<2\pi$，恰有四個相異實根。



(4)錯誤。$f(\cos x)=0$，$0\le x<2\pi$，恰有四個相異實根。



(5)正確。$f(\tan x)=0$，$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$，恰有三個相異實根。



故選(2)(5)

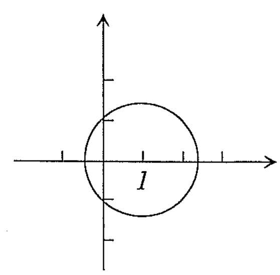
11. 參考答案：(1)(2)(3)(4)(5)

試題解析：(1)正確。當$z=1-\sqrt{2}i$時，$\overline{z}=1+\sqrt{2}i$，

此時，$(z-1)(\overline{z}-1)=(-\sqrt{2}i)(\sqrt{2}i)=2$

(2)正確。$(z-1)(\overline{z}-1)=2$，$(z-1)\overline{(z-1)}=2$，$|z-1|^2=2$

$|z-1|=\sqrt{2}$，所有可能的z構成的圖形爲以 1 爲圓心且半徑爲$\sqrt{2}$的圓



(3)正確。$z=2+i$滿足$(z-1)(\overline{z}-1)=2$

(4)正確。當z爲實數時，$z=1\pm\sqrt{2}$，恰爲一正數及一負數

(5)正確。$|z|$的最大値爲$\sqrt{2}+1$，最小値爲$\sqrt{2}-1$，滿足$|z|=2$的z恰有 2 個

（即$z=\dfrac{3}{2}\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}i$）

故選(1)(2)(3)(4)(5)

12. 參考答案：(1)(2)(4)(5)

試題解析：(1)正確。(2)正確。$f(x)-2g(x)=(a-2b)x^2+7x+35$，

$3f(x)+g(x)=14x^3+(3a+b)x^2+70x=x[14x^2+(3a+b)x+70]$

$\because\ x \nmid f(x)$ 且 $x \nmid g(x)$，又 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的最高公因式爲二次式，

$\therefore\ \dfrac{a-2b}{14}=\dfrac{7}{3a+b}=\dfrac{35}{70}$，$\begin{cases} a-2b=7 \\ 3a+b=14 \end{cases}$，得 $a=5$，$b=-1$

(3)錯誤。$f(x)=(4x+1)(x^2+x+5)$，$g(x)=(2x-3)(x^2+x+5)$，

$\begin{cases} y=(4x+1)(x^2+x+5) \\ y=(2x-3)(x^2+x+5) \end{cases}$，$(4x+1)(x^2+x+5)=(2x-3)(x^2+x+5)$

$2(x+2)(x^2+x+5)=0$，得 $x=-2$，$\dfrac{-1\pm\sqrt{19}\,i}{2}$，

恰有一個實根，故 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 的圖形恰有一個交點

(4)正確。假設方程式 $(f(x))^2+(g(x))^2=0$ 有實根 α，則 $(f(\alpha))^2+(g(\alpha))^2=0$，

$f(\alpha)=0$ 且 $g(\alpha)=0$，$\alpha^2+\alpha+5=0$，得 $\alpha=\dfrac{-1\pm\sqrt{19}\,i}{2}$（不合），

故方程式 $(f(x))^2+(g(x))^2=0$ 沒有實根

(5)正確。$f(x)g(x)<0$，$(4x+1)(2x-3)(x^2+x+5)^2<0$，$(4x+1)(2x-3)<0$，

得 $-\dfrac{1}{4}<x<\dfrac{3}{2}$，不等式 $f(x)g(x)<0$ 的整數解爲 0，1

故選(1)(2)(4)(5)

第貳部分：選填題

A. 參考答案：20（⑬ 2　⑭ 0）

試題解析：圓心 $K(8,9)$，半徑 $r=5$，$d(K,L)=\dfrac{|8+27+5|}{\sqrt{1+9}}=4\sqrt{10}$

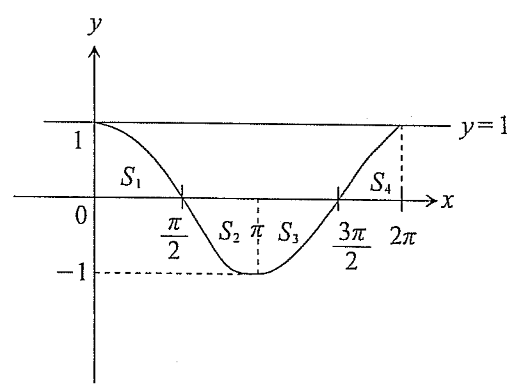
圓 C 上的點到直線 L 的距離之最小值爲 $4\sqrt{10}-5=7.\cdots$，最大值爲 $4\sqrt{10}+5=17.\cdots$

故圓 C 上到直線 L 的距離正好是整數值 8，9，10，11，12，13，14，15，16，17 的點各有 2 個，共 20 個

B. 參考答案：6.28（⑮ 6　⑯ 2　⑰ 8）

試題解析：如右圖，$S_1=S_2$，$S_3=S_4$

故所求面積爲 $1\cdot 2\pi=2\pi\approx 6.284\approx 6.28$



C. 參考答案：34（⑱ 3　⑲ 4）

試題解析：質因數 2 的個數比 5 的個數多，

只需計算質因數 5 的個數

1，4，7，…，400 中 5 的倍數有

10，25，…，400，共 $\dfrac{400-10}{15}+1=27$ 個

25 的倍數有 25，100，…，400，共 $\dfrac{400-25}{75}+1=6$ 個

125 的倍數有 250，共 1 個

質因數 5 的個數共 $27+6+1=34$

故 n 的最大值爲 34

D. 參考答案：$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$（⑳ 3　㉑ 3）

試題解析：【方法一】

$(\sqrt{3}\,b-c)\cos A=a\cos C$

$\Rightarrow\ 2R(\sqrt{3}\sin B-\sin C)\cos A=2R\sin A\cos C$

$\Rightarrow\ \sqrt{3}\sin B\cos A-\sin C\cos A=\sin A\cos C$

$\Rightarrow\ \sqrt{3}\sin B\cos A=\sin A\cos C+\cos A\sin C$

$\Rightarrow\ \sqrt{3}\sin B\cos A=\sin(A+C)=\sin B$

$\Rightarrow\ \cos A=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【方法二】

$(\sqrt{3}\,b-c)\cos A=a\cos C$

$=a\cos C+c\cos A=b$

$\Rightarrow\ \sqrt{3}\,b\cos A$

$\Rightarrow\ \cos A=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

E. 參考答案：$\dfrac{88}{7}$（㉒ 8　㉓ 8　㉔ 7）

試題解析：$\triangle ADF$ 面積$=\dfrac{3\times 1}{4\times 4}$($\triangle ABC$ 面積)$=\dfrac{3}{16}$($\triangle ABC$ 面積)，同理，

$\triangle BED$ 面積$=\triangle CFE$ 面積$=\dfrac{3}{16}$($\triangle ABC$ 面積)，得 $\triangle DEF$ 面積$=\dfrac{7}{16}$($\triangle ABC$ 面積)

$\overrightarrow{DE}=(-1,-2)$，$\overrightarrow{DF}=(3,-5)$，$\triangle DEF$ 的面積爲 $\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 3 & -5\end{vmatrix}\right|=\dfrac{11}{2}$，

故 $\triangle ABC$ 的面積爲 $\dfrac{16}{7}\times\dfrac{11}{2}=\dfrac{88}{7}$

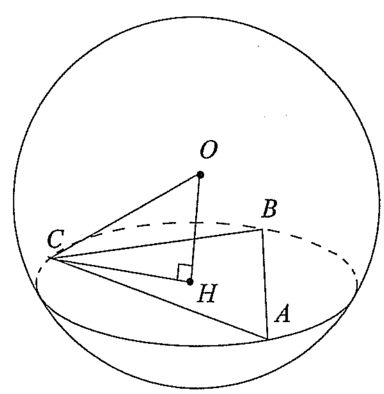
F. 參考答案：$\dfrac{14}{3}$（㉕ 1　㉖ 4　㉗ 3）

試題解析：設球心 O 在平面 ABC 之投影點爲 H

令 $\overline{OC}=R$

$\Rightarrow\ \overline{OH}=\dfrac{R}{2}$

$\Rightarrow\ \overline{CH}=\dfrac{\sqrt{3}R}{2}$ 爲 $\triangle ABC$ 外接圓之半徑



$\triangle ABC$ 中，$\cos C=\dfrac{5^2+8^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 8}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow\ \sin C=\sqrt{1-(\dfrac{1}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

由 $2\,\overline{CH}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}$　得 $\sqrt{3}R=\dfrac{7}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{14}{\sqrt{3}}$

故 $R=\dfrac{14}{3}$

G. 參考答案：62（㉘ 6　㉙ 2）

試題解析：觀察各等式右邊最高次項的係數 2，8，32，128，a，可推得 $a=512$

觀察各等式右邊 $\cos^2\theta$ 項的係數 2，-8，18，-32，c 與等式左邊 θ 的倍數，

發現 $2=2\times1$，$-8=4\times(-2)$，$18=6\times3$，$-32=8\times(-4)$，可推得 $c=10\times5=50$

令 $\theta=0$ 代入等式(5)可得 $1=a-1280+1120+b+c-1$ 化簡得 $a+b+c=162$

於是 $b=162-a-c=-400$

故 $a+b-c=512+(-400)-50=62$

H. 參考答案：21（㉚ 2　㉛ 1）

試題解析：設每年年底的砍伐數量為 x 萬棵

則 $200(1+12\%)^{15}\geq x(1+12\%)^{14}+x(1+12\%)^{13}+\cdots+x(1+12\%)+x+300$

$\Rightarrow\ 200\cdot1.12^{15}\geq x(1+1.12+1.12^2+\cdots+1.12^{14})+300$

$=x\cdot\dfrac{1.12^{15}-1}{1.12-1}+300\cdots\cdots$ ①

令 $A=1.12^{15}$

$\Rightarrow\ \log A=15\log1.12=15\log\dfrac{2^4\times7}{100}$

$=15(4\log2+\log7-2)=0.7365=\log5.451$

$\Rightarrow\ A=5.451$

代入①得 $200\cdot5.451\geq x\cdot\dfrac{5.451-1}{1.12-1}+300$

$\Rightarrow\ x\leq21.3\cdots$

故 x 最大為 21