

臺中區國立高級中學 100 學年度
大學入學第二次學科能力測驗聯合模擬考

數學考科

試題編號：AU-3002
考試日期：100.12.19

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 6 題，選填題第 A 至 H 題共 8 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上畫記，修正時應以橡皮擦拭，切勿使用修正液（帶）。

作答說明：在答案卡適當位置選出數值或符號。請仔細閱讀下面的例子。

(一) 填答選擇題時，只用 1, 2, 3, 4, 5 等五個格子，而不需要用到 -, ±, 以及 6, 7, 8, 9, 0 等格子。

例：若第 1 題的選項為(1) 3 (2) 5 (3) 7 (4) 9 (5) 11，而正確的答案為 7，亦即選項 (3)時，考生要在答案卡第一列 $\overset{3}{\square}$ 劃記（注意不是 7），如：

解 答 欄													
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±	
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若多選題第 10 題的正確選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡的第 10 列的 $\overset{1}{\square}$ 與 $\overset{3}{\square}$ 劃記，如：

10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±	
	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

(二) 選填題的題號是 A, B, C, …, 而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而答案是 $\frac{3}{8}$ 時，則考生必須分別在答案

卡的第 18 列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\overset{8}{\square}$ 畫記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±	
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±	
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $-\frac{7}{50}$ 時，則考生必須分別在

答案卡的第 20 列的 \square 與第 21 列的 \square 畫記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±	
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±	
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

祝考試順利

第壹部分：選擇題（佔 60 分）

一、單選題（佔 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題 5 個選項，其中只有一個是最適當的答案，畫記在答案卡之「解答欄」。各題答對得 5 分；未作答、答錯或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 下列各數何者最小？

(1) $8^{\frac{1}{4}}$

(2) $\sqrt[6]{4}$

(3) $(\frac{1}{4})^{\frac{-1}{3}}$

(4) $\sqrt{2\sqrt[3]{4}}$

(5) $\frac{\log_5 8}{\log_5 4}$

2. 有四組數值資料如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} A : 1、2、3、4、5 \\ B : 2、4、6、8、10 \\ C : 101、102、103、104、105 \\ D : 1、4、9、16、25 \end{array} \right. ,$$

其算術平均數 (M) 及樣本標準差 (S) 分別為 $M_A、M_B、M_C、M_D$ 及 $S_A、S_B、S_C、S_D$ ，則下列各敘述何者正確？

(1) $S_A = S_B$

(2) $M_A = M_B$

(3) $S_D = S_A^2$

(4) $S_B = 2S_C$

(5) $M_D = M_A^2$

3. 在坐標平面上，一光線通過點 $(2, 1)$ 射向 x 軸上一點 P ，經 x 軸反射後與圓： $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 5$ 相切，設 P 座標為 $(t, 0)$ ，試問 t 值為

(1) $\frac{1}{3}$

(2) 1

(3) $\frac{6}{5}$

(4) $\frac{5}{4}$

(5) $\frac{3}{2}$

4. 空間中一點 $P(1, -2, 3)$ ，試問到下列何者距離最近？
- (1) 點 $(-1, 2, -3)$
 - (2) x 軸
 - (3) xy 平面
 - (4) 平面 $x+2y+2z+3=0$
 - (5) 直線 $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2}$
5. 數學老師李大仁在期末測驗時，出了一張考卷給程又青同學，考卷內共有 5 題單選題（題號分別為 A 、 B 、 C 、 D 、 E ）及 10 題複選題，考試規則是：
15 題中只要作答 10 個問題且單選題至少要選 3 題以上，
但是因為單選題中的 A 與 B 為類似題，因此不能同時選作 A 及 B 。
試問程又青同學選擇作答題目的可能組合有幾種？（不考慮作答次序）
- (1) 720
 - (2) 840
 - (3) C_{10}^{15}
 - (4) 1260
 - (5) 2250
6. 已知對數 $\log A$ 的首數為 n ，尾數為 r ($0 \leq r < 1$)，其中 n 是正整數且 $1 \leq n \leq 100$ ，若對數 $\log \sqrt[3]{A}$ 的尾數是 $\frac{r}{3}$ ，但對數 $\log \sqrt{A}$ 的尾數不是 $\frac{r}{2}$ ，試問滿足這樣的 n 值共有多少個？
- (1) 15
 - (2) 16
 - (3) 17
 - (4) 18
 - (5) 19

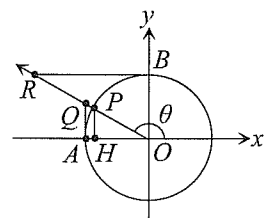
二、多選題 (30分)

說明：第7題至第12題，每題有5個選項，其中至少有一個是正確的選項，選出正確選項畫記在答案卡之「解答欄」。各題皆不倒扣，所有選項均答對者，得5分；答錯1個選項者，得3分；答錯2個選項者，得1分；所有選項均未作答或答錯多於2個選項者，該題以零分計算。

7. 一等比數列 $\langle a_n \rangle$ 為實數數列，公比為 r ，已知 $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_7 = 1$ 且 $a_9 = \frac{1}{32}$ ，則下列哪些選項是正確的？

- (1) $a_2 \times a_6 = 1$
- (2) $a_3 > 1$
- (3) $a_n > a_{n+1}$
- (4) $a_5 > 1$
- (5) $r = 2$

8. 坐標平面上以原點為圓心，1 為半徑之單位圓（如右圖）， θ 為第二象限角， θ 之終邊與單位圓交點為 P ，過 P 作 x 軸垂線，垂線與 x 軸交點 H 。過 $A(-1, 0)$ 作圓之切線，切線與 \overrightarrow{OP} 交點 Q ；過 $B(0, 1)$ 作圓之切線，切線與 \overrightarrow{OP} 交點 R 。下列哪些選項是正確的？



- (1) $\overline{PH} = \sin \theta$
- (2) $\overline{AQ} = -\tan \theta$
- (3) $\overline{OQ} = \csc \theta$
- (4) $\overline{BR} = -\cot \theta$
- (5) $\overline{OR} = -\sec \theta$

9. 設 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 、 θ_4 分別為第一、二、三、四象限角，且都介於 0° 到 360° 之間。已知 $|\sin \theta_1| = |\sin \theta_2| = |\sin \theta_3| = |\sin \theta_4| = \frac{2}{5}$ ，試判斷下列各選項，何者是正確的？

- (1) $\theta_1 < 30^\circ$
- (2) $\theta_2 + \theta_1 = 180^\circ$
- (3) $\sin \theta_3 = -\frac{2}{5}$
- (4) $\csc \theta_4 = -2.5$
- (5) $\theta_4 - \theta_3 = 90^\circ$

10. 已知 P 、 Q 、 R 三點都在球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 上，任兩點的球面距離為 π ，球心為 O ，試問下列哪些選項是正確的？
- (1) $\angle POQ = 60^\circ$
 - (2) $\overline{PQ} = 2$
 - (3) $\triangle PQR$ 為正三角形
 - (4) 四面體 $OPQR$ 為正四面體
 - (5) O 到平面 PQR 的距離為 $\sqrt{6}$
11. 下列哪些不等式與 $(x-1)(x-2) < 0$ 有相同的解？
- (1) $(1-x)(x-2) < 0$
 - (2) $\frac{x-1}{x-2} < 0$
 - (3) $\frac{1}{(x-1)(x-2)} \leq 0$
 - (4) $(x-1)(x-2)(x-3)^2 < 0$
 - (5) $(x-1)(x-2)(x^2+x+1) < 0$
12. 住在企鵝村的怪博士千兵衛與小綠老師帶著阿拉蕾及小卡參加村裡笑彈大王的婚宴酒席，若餐桌 A 為八人座的圓桌且餐桌坐滿八人，則依下列情形，求餐桌 A 的坐法有幾種？
- (1) 千兵衛與小綠老師相鄰且阿拉蕾及小卡也相鄰的坐法有 480 種
 - (2) 千兵衛與小綠老師相對而坐，阿拉蕾及小卡也相對而坐的坐法有 144 種
 - (3) 千兵衛與小綠老師相對而坐，阿拉蕾及小卡相鄰而坐的坐法有 192 種
 - (4) 阿拉蕾及小卡兩人坐在千兵衛與小綠老師中間（此四人相鄰）的坐法有 96 種
 - (5) 千兵衛與小綠老師相鄰但阿拉蕾及小卡不相鄰的坐法有 240 種

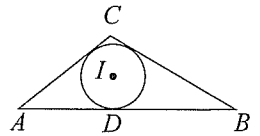
第貳部分、選填題（40 分）

說明：1. 第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「解答欄」所標示的列號（13~35）。
2. 每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 民國 100 年（西元 2011 年）雙十國慶（10 月 10 日）正好是星期一，剛好有三天連假（星期六日一），試問下次再碰到如此三天連假（星期六日一）的國慶日是民國 ⑬⑭⑮ 年
（注意：西元 2012，2016，2020，…皆為閏年，閏年一年有 366 天，平年一年有 365 天）

B. 已知實係數多項方程式 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ 有一實根為 -2 ，且與另兩虛根在複數平面上與原點 $(0, 0)$ 形成一正方形，則數對 $(p, q, r) = \underline{\textcircled{16}, \textcircled{17}, \textcircled{18}}$

C. $\triangle ABC$ 內切圓之圓心為 I ，半徑為 1。 (如右圖) 內切圓與 \overline{AB} 相切之切點為 D ，已知 $\overline{AD} = 3$ ， $\overline{BD} = 4$ ，求 $\sin C = \underline{\frac{\textcircled{19}\textcircled{20}}{\textcircled{21}\textcircled{22}}}$ 。



D. 坐標平面上，某人從 $P(1, 2)$ 直線前進到 $Q(-1, 3)$ ，走了 3 分鐘，如果方向不變，此人再走 6 分鐘會到達 R 點，然後左轉 90° 往前直走 3 分鐘到達目的地 K 點，試求 K 點的座標為 $\underline{\textcircled{23}\textcircled{24}, \textcircled{25}}$

E. 某人把一地球儀置於空間座標系上，測得北極所在座標為 $N(2, 2, -1)$ ，南極座標為 $S(-2, -2, -5)$ ，若包含北緯 30° 線的平面方程式為 $x + by + cz = d$ ，試求數對 $(b, c, d) = \underline{\textcircled{26}, \textcircled{27}, \textcircled{28}}$

F. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{AC} = 2$ ，射線 AP 為 $\angle A$ 之內角平分線並交 \overline{BC} 於 Q 點，而 $\triangle ABP$ 面積為 $\triangle ABC$ 面積的 $\frac{5}{3}$ 倍，若 $\overline{AP} = x\overline{AB} + y\overline{AC}$ ，則 $x + y = \underline{\frac{\textcircled{29}}{\textcircled{30}}}$

G. 郝友前在台中逢甲夜市，設有一個抽獎遊戲攤位，已知郝友前提供的獎品價值為 120 元，遊戲規則如下：郝友前在一個不透明的紙箱中裝有編號 1 號球 1 個，2 號球 2 個，3 號球 3 個， \dots ，6 號球 6 個，共有 21 個球。參加抽獎遊戲的人須先繳交 k 元，然後隨機從箱中一次抽出二個球（每個球被抽中的機會均相等），若抽出的二個球號碼不一樣（例如抽出號碼是 3 號及 4 號），則可得 120 元獎品；又抽出二個球號碼相同，則沒有任何獎品。如果郝友前希望對每一位參加遊戲的客人，郝友前的獲利期望值為 1 元，試問 $k = \underline{\textcircled{31}\textcircled{32}\textcircled{33}}$

H. 橢圓 $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$ 之兩焦點 F_1, F_2 (F_1 在 F_2 的左邊)，若過橢圓上一點 $(4, 6)$ 之法線將 $\overline{F_1F_2}$ 分成兩線段 $\overline{F_1Q}$ 與 $\overline{F_2Q}$ ，試求 $\overline{F_1Q} : \overline{F_2Q} = \underline{\textcircled{34} : \textcircled{35}}$ 。

參考公式及可能用到的數值

1. 一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的公式解： $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
2. 空間中兩點 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ， $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 間的距離為

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
3. 空間中兩點 $P(x_1, y_1, z_1)$ 與 $R(x_2, y_2, z_2)$ ，若 $Q \in \overline{PR}$ 且 $\overline{PQ} : \overline{QR} = m : n$ ，則 Q 的坐標為

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m+n} \right)$$
4. 等比數列 $\langle ar^{k-1} \rangle$ 的前 n 項之和 $S_n = \sum_{k=1}^n ar^{k-1} = \frac{a[1 - r^n]}{1 - r}$ ($r \neq 1$)，第 n 項 $a_n = ar^{n-1}$
5. 三角函數的和角公式： $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
6. 三角函數的二倍角公式： $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$
7. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
 $\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
8. 算術平均數： $M(=\bar{X}) = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
 標準差 $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} [(\sum_{i=1}^n x_i^2) - n\bar{X}^2]}$
9. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ； $\sqrt{3} \approx 1.732$ ； $\sqrt{5} \approx 2.236$ ； $\sqrt{6} \approx 2.449$ ； $\pi \approx 3.142$
10. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$

臺中區國立高級中學 100 學年度 大學入學第二次學科能力測驗聯合模擬考 數學考科詳解

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 參考答案：(2)

試題解析：(1) $8^{\frac{1}{4}} = (2^3)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{9}{12}}$

(2) $\sqrt[6]{4} = (2^2)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{12}}$

(3) $(\frac{1}{4})^{-\frac{1}{3}} = (2^{-2})^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{8}{12}}$

(4) $\sqrt{2\sqrt[3]{4}} = 2^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{10}{12}}$

前四項大小為 $2^{\frac{10}{12}} > 2^{\frac{9}{12}} > 2^{\frac{8}{12}} > 2^{\frac{4}{12}}$

(5) 又 $\frac{\log_5 8}{\log_5 4} = \log_4 8 = \frac{3}{2}$ 且 $(\frac{3}{2})^3 = \frac{27}{8} > 2 = (2^{\frac{1}{3}})^3$, 即 $\frac{3}{2} > 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{4}$

∴ 最小為 $\sqrt[6]{4}$

2. 參考答案：(4)

試題解析：① $M_A = \frac{1}{5} [1+2+3+4+5] = 3$, 同理 $M_B = 6, M_C = 103, M_D = 11$

可知 $M_A \neq M_B$ 且 $M_D \neq M_A^2$

② $S_A = \sqrt{\frac{1}{4} [(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2]} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

$S_B = 2S_A = \sqrt{10}, S_C = S_A = \frac{\sqrt{10}}{2} \therefore S_B = 2S_C$

$S_D = \sqrt{\frac{1}{4} [10^2 + 7^2 + 2^2 + 5^2 + 14^2]} = \sqrt{\frac{374}{4}} = \frac{\sqrt{374}}{2}$ 同此 $S_D \neq S_A^2$

故選(4) $S_B = 2S_C$

3. 參考答案：(5)

試題解析：A(2, 1) 對 x 軸的對稱點為 A'(2, -1), A' 點會在反射線的延長線上

設 $\overrightarrow{A'P} : y+1 = m(x-2) \Rightarrow mx - y - 2m - 1 = 0$

∵ 與圓相切 $\therefore \frac{|-2m-2-2m-1|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5}$

$\Rightarrow |4m+3| = \sqrt{5m^2+5}$

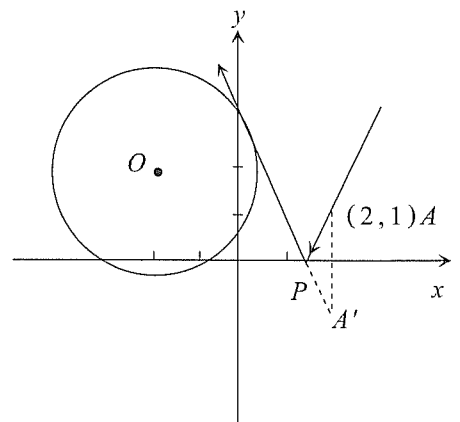
平方後整理得 $11m^2 + 24m + 4 = 0$

即 $(11m+2)(m+2) = 0$

$\Rightarrow m = -2$ 或 $-\frac{2}{11}$ (不合)

故 $\overrightarrow{A'P} : y+1 = -2(x-2)$

令 $y=0$ 代入得 $x = \frac{3}{2}$, 即 $t = \frac{3}{2}$



4. 參考答案：(4)

試題解析：(1)兩點距離 $=\sqrt{4+16+36}=\sqrt{56}$

(2) P 在 x 軸的投影點為 $Q(1,0,0)$ ， $PQ=\sqrt{0+4+9}=\sqrt{13}$

(3) P 在 xy 平面的投影點為 $(1,-2,0)$ ，則 P 到平面距離為3

(4) P 到平面距離為 $\frac{|1-4+6+3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{6}{3}=2$

(5)設直線上任一點 $A(t+2, 2t-1, 2t-3)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \overline{AP} &= \sqrt{(t+1)^2 + (2t+1)^2 + (2t-6)^2} \\ &= \sqrt{9t^2 - 18t + 38} \\ &= \sqrt{9(t^2 - 2t + 1) + 29} \\ &= \sqrt{9(t-1)^2 + 29}, \text{ 距離為 } \sqrt{29}\end{aligned}$$

5. 參考答案：(4)

試題解析：① C_{10}^3 顯然錯誤，其中可能同時選中 A 、 B 且單選題不見得選3題以上

前5題選3題 前5題選4題
 ↙ 同時含 A 、 B ↘ 含 A 、 B

$$\begin{aligned}\text{②所求} &= [C_3^5 - C_2^5 C_1^3] \cdot C_7^{10} + [C_4^5 - C_2^5 C_2^3] \cdot C_6^{10} \\ &= 7 \times 120 + 2 \times 210 = 840 + 420 \\ &= 1260, \text{ 故選(4)}\end{aligned}$$

6. 參考答案：(3)

試題解析：已知 $\log A = n + r$

$$\begin{cases} \log \sqrt[3]{A} = \frac{n}{3} + \frac{r}{3} \rightarrow \text{尾數為 } \frac{r}{3}, \text{ 即 } \frac{n}{3} \in Z \rightarrow n \text{ 是 } 3 \text{ 的倍數} \\ \log \sqrt{A} = \frac{n}{2} + \frac{r}{2} \rightarrow \text{尾數不是 } \frac{r}{2}, \text{ 即 } \frac{n}{2} \notin Z \rightarrow n \text{ 是奇數} \end{cases}$$

$$\therefore n \text{ 是奇數且為 } 3 \text{ 的倍數} \quad \therefore n = 3(2k+1) = 6k+3$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, 16$$

共有17個解

二、多選題

7. 參考答案：(1)(2)(3)

試題解析：由 $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_7 = 1$ ，得 $a_1 \cdot a_1 r \cdot a_1 r^2 \cdot \dots \cdot a_1 r^6 = 1$

$$\Rightarrow (a_1 r^3)^7 = 1 \Rightarrow a_1 r^3 = 1, \text{ 即 } a_4 = 1$$

$$\text{又 } a_9 = a_4 \cdot r^5, \text{ 得 } r = \frac{1}{2}$$

$$(1) \text{ 正確：} a_2 \times a_6 = (a_1 r)(a_1 r^5) = (a_1 r^3)^2 = 1$$

$$(2) \text{ 正確：} a_3 = 2 > 1$$

$$(3) \text{ 正確：} \because \text{公比 } \frac{1}{2} \quad \therefore a_n > a_{n+1}$$

$$(4) \text{ 錯誤：} a_5 = a_4 \cdot r = \frac{1}{2} < 1$$

$$(5) \text{ 錯誤：} r = \frac{1}{2}$$

8. 參考答案：(1)(2)(4)

試題解析：∵ $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ， $\sin \theta > 0$ ， $\cos \theta < 0$ ， $\tan \theta < 0$

(1) 正確： $\overline{PH} = 1 \cdot \sin \theta = \sin \theta$

(2) 正確： $\overline{AQ} = |\tan \theta| = -\tan \theta$

(3) 錯誤： $\overline{OQ} = |\sec \theta| = -\sec \theta$

(4) 正確： $\overline{BR} = |\cot \theta| = -\cot \theta$

(5) 錯誤： $\overline{OR} = |\csc \theta| = \csc \theta$

9. 參考答案：(1)(2)(3)(4)

試題解析：已知 $|\sin \theta_1| = |\sin \theta_2| = |\sin \theta_3| = |\sin \theta_4| = \frac{2}{5}$

則 $\sin \theta_1 = \frac{2}{5}$ ， $\sin \theta_2 = \frac{2}{5}$ ， $\sin \theta_3 = -\frac{2}{5}$ ， $\sin \theta_4 = -\frac{2}{5}$ ，

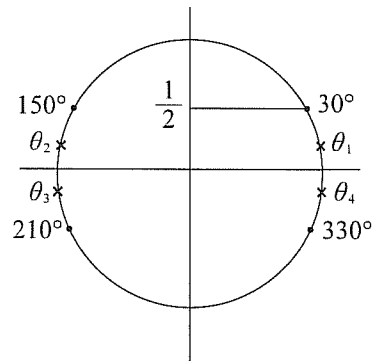
(1) 正確： $\sin \theta_1 = \frac{2}{5} < \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$ ，∴ $\theta_1 < 30^\circ$

(2) 正確：由 $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$ ∴ $\theta_1 + \theta_2 = 180^\circ$

(3) 正確： $\sin \theta_3 = -\frac{2}{5}$

(4) 正確： $\sin \theta_4 = -\frac{2}{5} \Rightarrow \csc \theta_4 = \frac{1}{\sin \theta_4} = -2.5$

(5) 錯誤：∵ $330^\circ < \theta_4 < 360^\circ$ ， $180^\circ < \theta_3 < 210^\circ$ ∴ $\theta_4 - \theta_3 > 90^\circ$



10. 參考答案：(1)(3)(4)(5)

試題解析：球心 $O(0, 0, 0)$ ，半徑 $r = 3$

(1) 正確：圓弧長 $S = r\theta \Rightarrow \pi = 3\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$

(2) 錯誤： $\angle POQ = 60^\circ$ 又 $\overline{OP} = \overline{OQ} = 3$ ∴ $\overline{PQ} = 3$

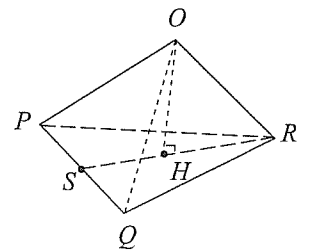
(3) 正確： $\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{PR} = 3$ ∴ $\triangle PQR$ 為正三角形

(4) 正確： $\overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{OR} = \overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{PR} = 3$

(5) 正確： $\overline{RS} = \overline{QR} \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$$\overline{RH} = \overline{RS} \times \frac{2}{3} = \sqrt{3}$$

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OR}^2 - \overline{RH}^2} = \sqrt{9 - 3} = \sqrt{6}$$



11. 參考答案：(2)(3)(4)(5)

試題解析：(1) 錯誤： $(1-x)(x-2) < 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) > 0$

(2) 正確： $\frac{x-1}{x-2} < 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) < 0$

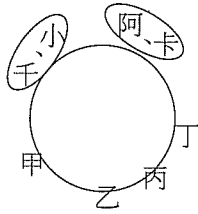
(3) 正確： $\frac{1}{(x-1)(x-2)} \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) \leq 0$ 但 $x \neq 1$ ， $x \neq 2$
 $\Rightarrow (x-1)(x-2) < 0$

(4) 正確： $(x-1)(x-2)(x-3)^2 < 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) < 0$ 且 $x \neq 3$
 $\Rightarrow (x-1)(x-2) < 0$

(5) 正確： $(x-1)(x-2)(x^2+x+1) < 0$ ∵ x^2+x+1 恆正 $\Rightarrow (x-1)(x-2) < 0$

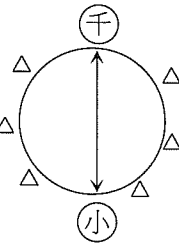
12. 參考答案：(1)(2)(3)(4)

試題解析：(1)



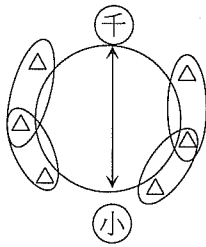
$$\left(\frac{6!}{6}\right) \times 2! \times 2! = 480$$

(2)



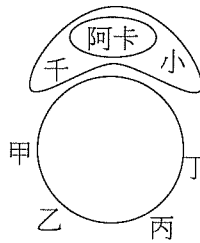
$$1 \times 6 \times 1 \times 4! = 144$$

(3)



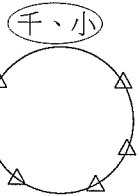
$$1 \times 4 \times 2! \times 4! = 192$$

(4)



$$\left(\frac{5!}{5}\right) \times 2! \times 2! = 96$$

(5)



$$\left(\frac{7!}{7}\right) \times 2! - 480 = 960$$

第貳部分：選填題

A. 參考答案：105 (13) 1 (14) 0 (15) 5

試題解析：平年 $365 \div 7 \cdots$ 餘 1

閏年 $366 \div 7 \cdots$ 餘 2

100 年 (平年) 國慶日 \Rightarrow 星期一

101 年 (閏年) 國慶日 \Rightarrow 星期三

102 年 (平年) 國慶日 \Rightarrow 星期四

103 年 (平年) 國慶日 \Rightarrow 星期五

104 年 (平年) 國慶日 \Rightarrow 星期六

105 年 (閏年) 國慶日 \Rightarrow 星期一

B. 參考答案：(4, 6, 4) (16) 4 (17) 6 (18) 4

試題解析： \because 為實係數方程式 \therefore 另二虛根必為 $-1+i$, $-1-i$

\therefore 原方程式為 $(x+2)[x-(-1+i)][x-(-1-i)]=0$

$\Rightarrow (x+2)(x^2+2x+2)=0$

$\Rightarrow x^3+4x^2+6x+4=0$

故 $p=4$, $q=6$, $r=4$

C. 參考答案： $\frac{77}{85}$ (19) 7 (20) 7 (21) 8 (22) 5)

試題解析： \overline{AI} 平分 $\angle A$ ， $\overline{AI} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

$$\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{10}} \times \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3}{5}$$

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \frac{4}{5}$$

$$\text{同理 } \sin B = 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} = \frac{8}{17}$$

$$\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{15}{17}$$

$$\Rightarrow \sin C = \sin(A+B) = \frac{3}{5} \times \frac{15}{17} + \frac{4}{5} \times \frac{8}{17} = \frac{77}{85}$$

【另解】

建立坐標

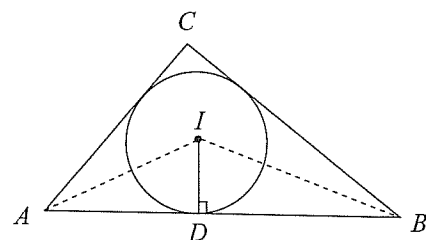
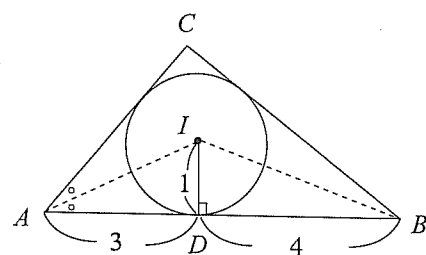
$$I(0,0), A(-3,-1), B(4,-1)$$

$$\angle AIB = \theta = 180^\circ - \frac{1}{2}(A+B)$$

$$\cos \theta = -\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{\overline{IA} \cdot \overline{IB}}{|\overline{IA}| |\overline{IB}|} = \frac{-12+1}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{17}} = \frac{-11}{\sqrt{170}}$$

$$\therefore \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{11}{\sqrt{170}} \rightarrow \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{7}{\sqrt{170}}$$

$$\text{因此 } \sin C = \sin(A+B) = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = 2 \cdot \frac{7}{\sqrt{170}} \cdot \frac{11}{\sqrt{170}} = \frac{77}{85}$$



D. 參考答案： $(-6, 3)$ (23) - (24) 6 (25) 3)

試題解析： $\because \overline{PQ} = (-2, 1)$

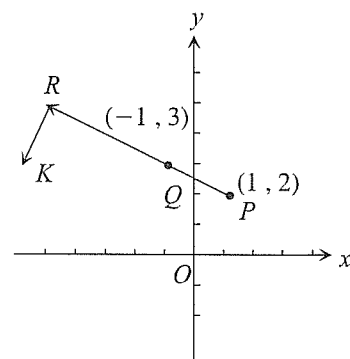
$$\therefore \overline{QR} = 2\overline{PQ} = (-4, 2)$$

$$\text{又 } \overline{RK} = (-1, -2)$$

$$\therefore \overline{OK} = \overline{OP} + \overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RK}$$

$$= (1, 2) + (-2, 1) + (-4, 2) + (-1, -2)$$

$$= (-6, 3)$$



E. 參考答案： $(1, 1, 0)$ (26) 1 (27) 1 (28) 0)

試題解析： $\because \overline{SN} = (4, 4, 4)$

此平面方程式 E 之法向量可為 $\vec{n} = (1, 1, 1)$

又 $\angle OQP = 30^\circ$ 即 $\overline{OQ} : \overline{OP} = 2 : 1$

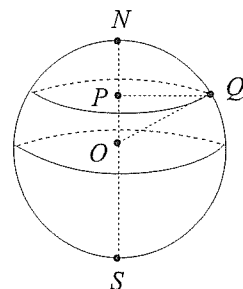
即 $\overline{ON} : \overline{OP} = 2 : 1 \Rightarrow \overline{NP} : \overline{PS} = 1 : 3$

利用內分點公式 $P\left(\frac{-2+6}{4}, \frac{-2+6}{4}, \frac{-5-3}{4}\right) = (1, 1, -2)$

\therefore 所求平面為 $(x-1) + (y-1) + (z+2) = 0$

$\Rightarrow x + y + z = 0$

故 $b = 1, c = 1, d = 0$



F. 參考答案： $\frac{5}{2}$ (㉙ 5 ㉚ 2)

試題解析： $\because \overline{BQ} : \overline{QC} = \overline{AB} : \overline{AC} = 2 : 1$

設 $a\triangle ABQ = 2t$

$a\triangle ACQ = t$

$a\triangle BPQ = x$

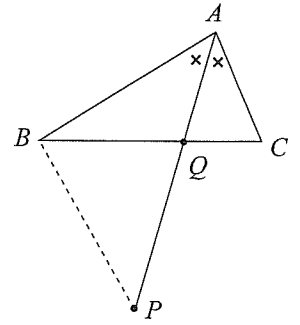
$$\Rightarrow \frac{x+2t}{2t+t} = \frac{5}{3} \Rightarrow x=3t$$

$$\therefore \overline{AQ} : \overline{AP} = 2 : 5$$

$$\Rightarrow \overline{AP} = \frac{5}{2} \overline{AQ} = \frac{5}{2} \left(\frac{1}{3} \overline{AB} + \frac{2}{3} \overline{AC} \right)$$

$$= \frac{5}{6} \overline{AB} + \frac{5}{3} \overline{AC}$$

$$\therefore x = \frac{5}{6}, y = \frac{5}{3} \Rightarrow x+y = \frac{5}{2}$$



G. 參考答案：101 (㉛ 1 ㉜ 0 ㉝ 1)

試題解析：設抽出號碼為 x, y

$$P(x \neq y) = 1 - P(x=y) = 1 - \left[\frac{C_2^2 + C_3^3 + C_4^4 + C_5^5 + C_6^6}{C_2^{21}} \right]$$

$$= 1 - \left[\frac{C_3^7}{C_2^{21}} \right] = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$E = k - 120 \left(\frac{5}{6} \right) = 1 \quad \therefore k = 101$$

H. 參考答案：5 : 3 (㉞ 5 ㉟ 3)

試題解析： $\Gamma : \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$ 之 F_1, F_2 為 $(\pm 4, 0)$,

$$\text{過}(4, 6)\text{之切線 } \frac{x_0 x}{64} + \frac{y_0 y}{48} = 1 \Rightarrow \frac{4x}{64} + \frac{6y}{48} = 1 \Rightarrow x + 2y = 16$$

法線 $2x - y = \frac{(4, 6)}{2}$, 和 x 軸交點 $Q(1, 0)$, 故 $\overline{F_1 Q} : \overline{F_2 Q} = 5 : 3$

另解：令 $P(4, 6)$, $\because \overline{PQ}$ 平分 $\angle F_1 P F_2$

$$\therefore \overline{F_1 Q} : \overline{F_2 Q} = \overline{PF_1} : \overline{PF_2} = \sqrt{8^2 + 6^2} : \sqrt{0^2 + 6^2} = 10 : 6 = 5 : 3$$